Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN71L : Modelos Estocásticos
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Denis Sauré

Control 3

Viernes 14 de Noviembre, 2003.

Problema 1

1. (1.0 pts.) Para cualquier $\theta > 0$ de define el proceso escalado $\{X_t,\, t \geq 0\}$

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{\theta}} B_{\theta t}$$

donde $\{B_t, t \geq 0\}$ denota un movimiento Browniano estándar. Muestre que X_t es un movimiento Browniano estándar.

Para las siguientes partes considere $\tau_a = \inf\{t : B_t = a\}$.

2. (3.0 pts.) Considere la función $f(a, \lambda) = E[\exp(-\lambda \tau_a)]$
   a) Encuentre una ecuación diferencial para $f(a, \lambda)$.
   b) Encuentre una relación entre $f(a, \lambda)$, $f(b, \lambda)$ y $f(a+b, \lambda)$. Para esto relacione τ_{a+b} con $\tau_a + \tau_b$.
   c) Encuentre una relación entre $f(ab, \lambda)$ y $f(a, b^2\lambda)$. Para esto relacione τ_{ab} con $b^2\tau_a$ utilizando la parte 1.
   d) Muestre que
   $$f(a, \lambda) = \exp(c \cdot a\sqrt{\lambda})$$
   Encuentre el valor de c.

3. (1.0 pts.) Muestre que, para cualquier valor real a se tiene que

$$E[\exp(-\lambda \tau_a)] = \exp(-|a|\sqrt{2\lambda})$$

Para esto, resuelva considerando $a \geq 0$ y utilice el proceso $M_t = \exp(\rho B_t - \frac{1}{2}\rho^2 t)$. Concluya.

NOTA: Considere que $P(\tau_a \leq \infty) = 1$.

4. (1.0 pts.) Muestre que

$$E[\tau_a^{-1}] = \frac{1}{a^2}$$

NOTA: Considere que

$$t^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\lambda$$

Problema 2

ArmijoTicket, empresa encargada de la venta de entradas para el partido Chile v.s Paraguay, lo ha contratado a ud. para estudiar el actual sistema de venta de boletos.

Armijo ha dispuesto de un único lugar para la venta, el cual cuenta con 2 servidores con colas independientes. La atención de cada uno de ellos, es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu_i}$[horas] con i=1,2 respectivamente.

Los hinchas llegan al local de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. Si en el momento que arriba un cliente la cantidad de personas en el sistema es igual a k, éste se integra a la cola más corta con probabilidad q_k y en caso contrario se retira resignado a ver el partido por las pantallas de TBM. Ante empates en el largo de las colas los clientes eligen equiprobablemente.

Una vez en el sistema, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que entra al local hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media $\frac{1}{\beta}$[horas]. Consciente de lo anterior Armijo ha dispuesto una pantalla gigante en la cual se revisan momentos históricos del futbol chileno. Sin embargo, dada la infraestructura del local sólo las primeras R personas de cada cola, incluyendo a los clientes en atención, están en condiciones de ver dichos videos. Una persona que está esperando en la posición j con $j \leq R$ y se agota su paciencia, con probabilidad p decidirá irse y en caso contrario renovará sus intenciones de seguir esperando. Por otro lado, cuando un cliente se aburre y está en una posición mayor a R en su respectiva cola su decisión de dejar el sistema es indeclinable.

Además los clientes que se encuentran al final de cada fila, se cambian instantaneamente a la cola del otro servidor si es que al cambiarse la cantidad de personas que quedan delante de él, es menor al de la cola en que se encuentra actualmente.

1. (4.0 pts.) Modele el número de personas en cada subsistema como una cadena de Markov en tiempo continuo. En particular, explicite claramente todas las tasas de transición para los casos generales del Anexo, donde en el estado (x_t, y_t), x_t representa la cantidad de clientes en la cola del servidor 1 e y_t representa la cantidad de clientes en la cola del servidor 2.Ambas cantidades incluyen los clientes en atención. ¿Cuál es la condición de estacionaridad?.

2. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias responda las siguientes preguntas:

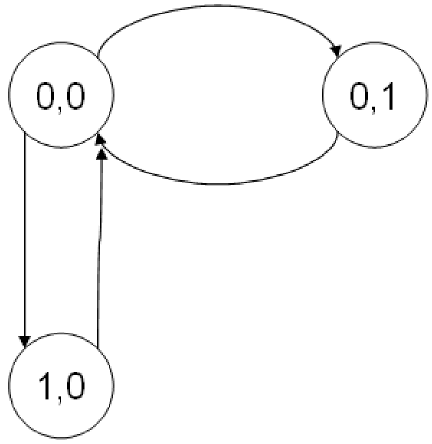
    a) (1.0 pts.) ¿Qué fracción (esperada) de los clientes, que en una hora llegan al sistema, deciden no entrar? Suponga régimen estacionario.

    b) (1.0 pts.) ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por aburrimiento)?

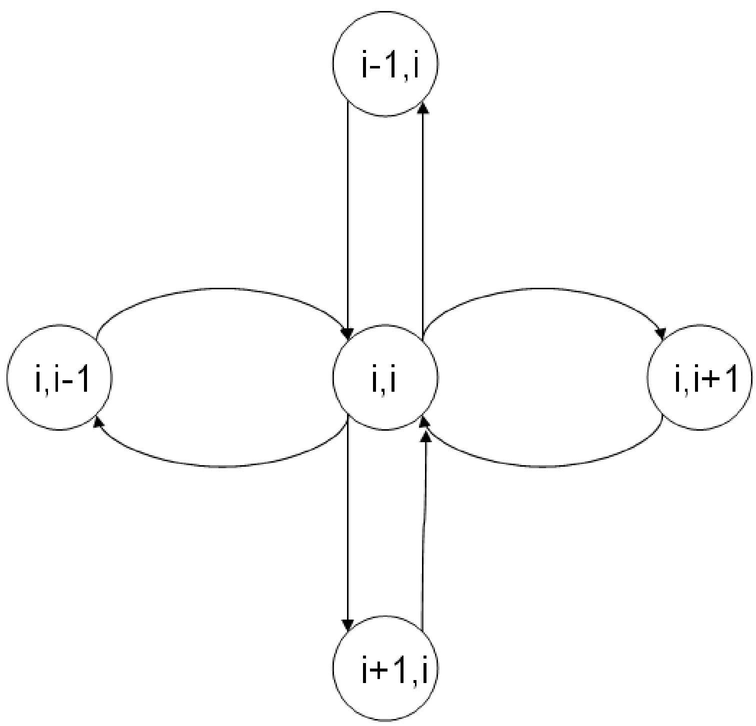
    c) (BONUS) (1.0 pts.) Para un instante cualquiera del tiempo en el largo plazo, en el cual ambas colas tienen i personas con $i > R$, entregue una expresión que le permita calcular la probabilidad de que la próxima persona que saldrá del sistema lo haga por que se aburrió. HINT: Encuentre una recurrencia, en función de los posibles eventos estando en el estado (i,i).

ANEXO

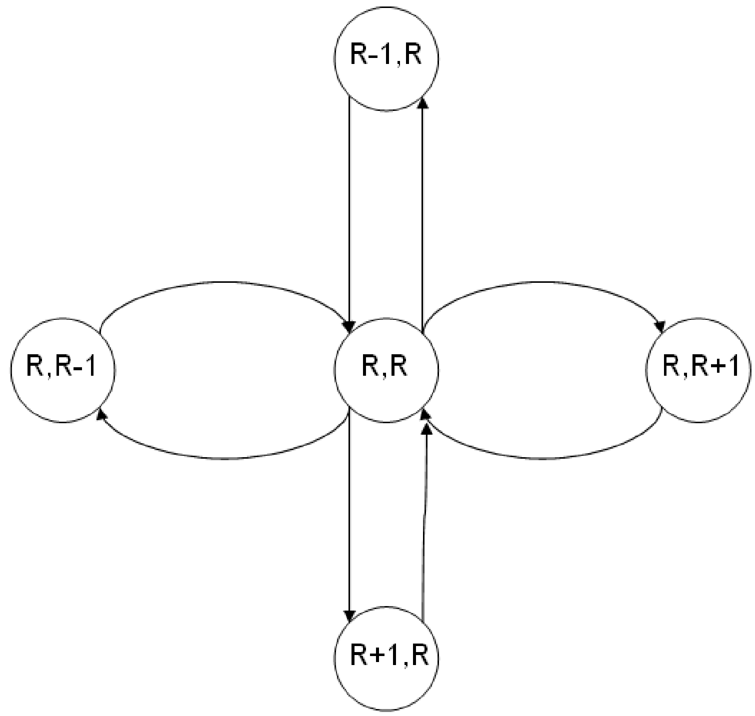
- Caso 1:



- Caso 2: $i < R$



- Caso 3:



- Caso 4: $i > R$