IN759: Macroeconomía II — *Sem. Primavera, 2004*

Profs.: R. Bergoeing y J. De Gregorio — Profs. Auxs.: F. Duarte y M. Núñez.

Guía de Ejercicios N2: Crecimiento

1. **Trabajo y Ocio**

   Considere el siguiente modelo de crecimiento, que incluye la decisión trabajo-ocio e introduce de manera secilla capital humano. Las familias deben decidir su dotación de tiempo entre trabajo (l_t), educación (e_t) y ocio ($1 - e_t - l_t$). El tiempo de ocio entra en la función de utilidad de la siguiente manera:

$$u(c_t, l_t, e_t) = \log c_t + \log(1 - e_t - l_t) \tag{1}$$

   Las familias usan el tiempo de educación para acumular capital humano (h_t) de acuerdo a:

$$h_{t+1} = (1 - \delta)h_t + e_t \tag{2}$$

   y rentan este capital (más su trabajo no calificado l_t) a las firmas. La función de producción (en forma intensiva) es:

$$f(h_t, l_t) = h_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{3}$$

   y como no existe capital físico ni inversión, todo el producto va destinado al consumo. Por simplicidad, asuma que no hay crecimiento de la población ni progreso técnico.

   a) Defina un Equilibrio Competitivo Secuencial para esta economía.

   b) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo.

   c) Encuentre los valores de estado estacionario (EE) de h^*, l^*, c^* y e^*.

   Suponga ahora que existe un gobierno, el cual quiere fomentar la educación en esta economía. Para ello, ofrece un subsidio a las familias proporcional al tiempo dedicado a educarse, subsidio que es financiado mediante un impuesto a suma alzada (*lump sum*) a las mismas familias.

   d) Defina el nuevo Equilibrio Competitivo para esta economía.

   e) Caracterice lo mejor posible el nuevo Equilibrio Competitivo.

   f) Encuntre los nuevos valores de EE de h^*, l^*, c^* y e^*. Compare sus resultados con los obtenidos en (c) y evalúe la eficacia del subsidio educativo.

2. **Crecimiento con Bancos**

   Considere una economía integrada por familias, firmas y bancos. Las familias tienen preferencias definidas sobre secuencias infinitas de consumo $\{c_t\}$ y ocio $\{1 - l_t\}$:

$$U(c_t, 1-l_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-l_t) \tag{4}$$

en donde $\beta \in (0,1)$, $u' > 0$, $u'' < 0$. Las familias enfrentan la restricción presupuestaria,

$$d_{t+1} = (1+i_t)[d_t + w_t l_t - c_t], \qquad \forall t \geq 0 \tag{5}$$

en donde d_t son los depósitos al comienzo del período t en el banco, w_t es el precio del retorno del trabajo, i_t es la tasa de interés por los depósitos. Las firmas enfrentan una secuencia de problemas de maximización estáticos, uno para cada período t. El problema en el período t es:

$$\max c_t + x_t - w_t l_t - r_t k_t \tag{6}$$

sujeto a que:

$$F(k_t, l_t) \geq c_t + x_t \tag{7}$$

donde $F(k_t, l_t)$ es una función de producción agregada neoclásica en el período t y r_t es el precio de arriendo del capital. Por último, los bancos son dueños del capital y lo arriendan a las firmas. Los bancos, además, aceptan depósitos de las familias y pagan un interés i. La industria bancaria es competitiva y la tecnología de intermediación tiene retornos constantes a escala. Las condiciones necesarias y suficientes para que los bancos optimicen son:

$$\begin{aligned} (1 + r_t - \delta) &= (1 + i_t) && (8) \\ k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + x_t && (9) \\ d_t &= k_t(1+i_t) && (10) \end{aligned}$$

a) Defina y caracterice tanto como pueda el Equilibrio Competitivo para esta economía.

b) Defina el Equilibrio Competitivo de Crecimiento Balanceado para esta economía.

c) Suponga el siguiente set paramétrico de economías:

$$\begin{aligned} u(c_t, 1-l_t) &= \log c_t + \alpha \log(1-l_t) && (11) \\ F(k_t, l_t) &= k_t^{\theta}(A_t l_t)^{1-\theta} && (12) \\ A_t &= (1+g)^t && (13) \end{aligned}$$

1) Dados los parámetros, describa el algoritmo (la secuencia de pasos) que permite encontrar la solución al Equilibrio Competitivo de Crecimiento Balanceado para la economía en este set.
2) Dados las asignaciones y precios de equilibrio en el largo plazo -es decir, el Equilibrio Competitivo de Crecimiento Balanceado-, describa el algoritmo que permite calibrar la economía anterior.

3. **Crecimiento Endógeno**
Considere una economía competitiva donde el consumidor-productor representativo vive eternamente y maximiza la siguiente función de utilidad (la población es normalizada a uno y no crece):

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \tag{14}$$

La función de producción es la siguiente:

$$y_t = k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} \tag{15}$$

donde $0 < \alpha < 1$, y es la producción, k el stock de capital (no se deprecia) y g el gasto de gobierno (imagine que es infraestructura). El gobierno sigue una política de presupuesto equilibrado con una tasa de impuesto proporcional al ingreso de τ (es decir $g_t = \tau\, y_t$ para todo t).

a) Calcule la tasa de crecimiento del consumo en estado estacionario como función de τ (note que y, k y g crecen a la misma tasa que g y usted no necesita demostrarlo). ¿Por qué esta economía puede crecer permanentemente?
b) Calcule el valor de τ que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.
c) Suponga ahora que la economía es dirigida por un planificador central. ¿Cuál es la tasa de crecimiento que él elegiría? (Recuerde que en este caso maximiza utilidad sujeto a la ecuación de acumulación más la restrición de presupuesto del gobierno). Dado τ, ¿cuál economía crece más, la de mercado o la planificada? ¿Por qué?

4. Use el modelo de crecimiento neoclásico de economía cerrada (Solow-Swan) para mostrar que:

a) Un aumento en la tasa de crecimiento de la población reduce el crecimiento.
b) Un aumento de la tasa de ahorro aumenta la tasa de crecimiento.

Discuta si sus resultados se aplican a la transición o al estado estacionario.

5. Demuestre que, en el modelo AK con consumidores que optimizan intertemporalmente una función con elasticidad de sustitución intertemporal σ constante (es decir $\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$), los parámetro deben cumplir la siguiente condición:

$$\rho > (A-\delta)(1-\sigma) \tag{16}$$

6. **Progreso Tecnológico embutido**[1]
Una de las formas de ver el progreso tecnológico es que la productividad del capital en instante t depende del "estado"de la tecnología en ese instante y no se ve afectado por el progreso tecnológico posterior. Esto es lo que se llama el *progreso tecnológico embutido* (el progreso tecnológico tiene que estar "dentro"del nuevo capital antes que pueda aumentar la producción). Esta pregunta investiga este efecto.

[1]Esto viene de Solow 1960, y Sato 1966.

a) Primero modificamos el modelo básico de Solow para poder tener progreso tecnológico "capital augmenting.^{en} vez de "labor augmenting". Para esto asuma que la función de producción es $Y(t) = [A(t)K(t)]^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$. Asuma que A crece a una tasa μ, es decir $\dot{A}(t) = \mu A(t)$. Muestre que la economía converge a una trayectoria de crecimiento estable. Encuentre la tasa de crecimiento de Y y K. (Hint: muestre que se puede escribir $Y/(A^{\phi}L)$ como función de $K/(A^{\phi}L)$, donde $\phi = \alpha/(1-\alpha)$. Después analice la dinámica de $k = K/(A^{\phi}L)$.

b) Ahora considere el progreso tecnológico embutido. Específicamente, asuma que la función de producción es $Y(t) = J(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$, donde $J(t)$ es la cantidad efectiva del stock de capital. La dinámica de $J(t)$ esta dada por $\dot{J}(t) = sA(t)Y(t) - \delta J(t)$. La presencia del término $A(t)$ en esta expresión significa que la productividad de la inversión en el momento t depende de la tecnología disponible en t.
Muestre que la economía converge a una trayectoria de crecimiento estable o balanceada. ¿Cuáles són las tasas de crecimiento de Y y de J? (Hint: defina $\bar{J}(t) = J(t)/A(t)$. Después use la misma metodología de la parte (a), fijándose en $\bar{J}(t)/(A^{\phi}L)$ en vez de $K/(A^{\phi}L)$.)

7. **Learning by doing**
Suponga una economía donde la función de producción viene dada por: $Y(t) = K(t)^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}$, donde L es constante e igual a 1. Además se sabe que el capital evoluciona de acuerdo a $\dot{K}(t) = sY(t)$, y la acumulación de conocimiento ocurre como efecto secundario de la producción de bienes, es decir: $\dot{A}(t) = BY(t)$.

a) Encuentre una expresión para $g_a(t)$ y $g_k(t)$ en términos de $A(t)$, $K(t)$ y los parámetros del modelo (donde se define $g_q = \dot{q}/q$).

b) Dibuje las líneas $\dot{g_a}(t) = 0$ y $\dot{g_k}(t) = 0$ en el espacio de (g_a, g_k).

c) ¿Converge la economía a una trayectoria de crecimiento estable? Si su respuesta es afirmativa cuáles son las tasas de crecimiento de K, A e Y.

d) Analice el efecto de un aumento en la tasa de ahorro sobre el crecimiento de largo plazo de la economía.

8. **Pago a los factores en el Modelo de Solow**
Recuerde que en el modelo de Solow el producto Y, viene dado por:

$$Y = F(K, L) \tag{17}$$

donde estamos ignorando los incrementos de productividad; K y L denotan respectivamente capital y trabajo; y la función de producción F exhibe retornos constantes de escala, es creciente en cada uno de sus argumentos, tiene retornos decrecientes en cada uno de los argumentos y cumple con las condiciones de Inada. La razón capital-trabajo se denota mediante $k = K/L$ y la forma intensiva de la función de producción viene dada por

$$y = f(k) \tag{18}$$

donde $f(k) = F(K, 1)$. La dinámica del capital queda caracterizada por:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k \tag{19}$$

donde s, n y δ denotan la tasa de ahorro, tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital, respectivamente. Las tres tasas son exógenas al modelo. En este problema consideramos una economía pobre (es decir, con menos capital que en estado estacionario) y estudiamos como evolucionan los precios de los factores (salario y retornos al capital) camino al estado estacionario.

a) Suponga que el pago al capital r, viene dado por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ y el salario, w, por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$. ¿Bajo que condiciones es apropiado este supuesto?

b) Muestre que $r = f'(k)$ y $w = f(k) - kf'(k)$. Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.

c) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que $rK + wL = F(K, L)$.

d) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.

e) Suponga que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de cambio del pago al capital, $\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r}$, y la tasa de cambio del salario $\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w}$. Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.

f) La tasa de retorno al capital en Chile durante el último año ha sido considerablemente menor que en años anteriores (*v.g.*, IPSA, IGPA). ¿Es posible explicar este fenómeno en base a los resultados de este problema? Justifique.

g) Los salarios reales (medidos correctamente) vienen creciendo sostenidamente en los últimos años, sin que se note una caída en la tasa de crecimiento. Es consistente con los resultados de este problema? Si su respuesta es afirmativa, justifique cuidadosamente. Si es negativa, discuta cuál aspecto excluido del modelo estudiado en este problema puede explicar la aparente discrepancia[2].

9. **Efecto escala en los modelos de crecimiento**[3]

En este problema analizaremos las implicancias de los nuevos modelos de crecimiento endógeno sobre la relación entre el nivel de la población y su tasa de crecimiento y la tasa de crecimiento del producto per-cápita. El efecto escala significa que la tasa de crecimiento del producto (o consumo) depende del nivel de la población.

Suponga una economía donde una parte de la población se dedica a producir nuevas ideas, L_A, mientras que el resto utiliza esas ideas para producir más bienes, L_Y, la población total crece a una tasa n. Por simplicidad supondremos que $L_A = sL$, mientras que $L_Y = (1 - s)L$, donde L es la población total. La función de producción es:

$$Y = A^{\sigma} L_Y \tag{20}$$

[2]Esto fue cierto hasta 1998, cuando este problema apareció en un control. Tome como cierta la afirmación para responder a la pregunta.

[3]Este problema esta basado en "Growth: With or Without Scale Effects"de Charles Jones, preparado para la Reunión de la AEA, January 3, 1999. Puede bajarse de http://www.stanford.edu/ chadj/scaleff10.pdf.

donde A es la cantidad de ideas que existen en la economía, $\sigma > 0$. Suponga además que la cantidad de ideas evoluciona de acuerdo a:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \delta L_A \tag{21}$$

a) De una intuición de las ecuaciones (20) y (21).

b) Encuentre la tasa de crecimiento per-cápita de esta economía.

Suponga ahora que la función que describe la evolución de las ideas es:

$$\dot{A} = \delta L_A A^{\phi} \tag{22}$$

donde $\phi < 1$. La función de producción sigue siendo la misma.

c) Cuales son las diferencias entre la ec. (21) y (22). ¿Qué implicancias tienen estos modelos sobre la relación entre población y crecimiento del producto?

d) Encuentre usando la ecuación (22) la tasa de crecimiento del producto per-cápita. Para ello use el hecho que en estado estacionario la tasa de crecimiento de las ideas es constante.

e) Analize el impacto de un aumento de s en la parte (b) y la parte (d). De intuición económica.

f) Obtenga el nivel de ingreso per-cápita en el estado estacionario. Para ello debe usar (22) más los resultados obtenidos en (d). ¿Cómo afecta un aumento de s en el nivel de ingreso per cápita?

g) En el año 10.000 BC, los continentes de Australia, Europa y América se separaron y no tuvieron ningún contacto hasta la época en que Cristóbal Colon descubrió América. Se sabe con bastante precisión que en el año 10.000 BC la población de Europa era mayor a la de América y esta mayor a la de Australia. Sin embargo, el nivel técnologico era similar[4]. Usando los resultados de las partes anteriores que puede inferir sobre el nivel técnologico de los tres continentes al momento en que Colón descubrió América. Suponga que las tasas de crecimiento de las poblaciones en los tres continentes fue similar.

[4]Para mayores detalle sobre esta evidencia ver M. Kremer Population Growth and Tecnological Change: One Million B.C to 1990 Quartely Journal of Economics, CVIII, (1993) 681-716.