Control No. 2
Viernes 8 de Octubre de 2004

Instrucciones: el examen dura 110 minutos y contiene 110 puntos. Si encuentra algún error en el planteamiento de una pregunta o falta información, haga los supuestos que considere necesarios para responder esa pregunta. Asegúrese, sin embargo, que sus supuestos y conclusiones sean consistentes con los enunciados.

1. **Preguntas breves (30 puntos).**
Comente las siguientes afirmaciones argumentando si son verdaderas, falsas o inciertas.

   a) **(15 puntos)** "Las reformas estructurales llevadas a cabo en Chile durante los años setenta (que pueden ser vistas como una reducción en el nivel de distorsiones) fueron seguidas por un aumento en la tasa de crecimiento del PIB per cápita. Esta observación es inconsistente con los modelos de crecimiento exógeno, pues en éstos las políticas públicas tienen efectos sobre el nivel de ingreso, no sobre su tasa de crecimiento".

   b) **(15 puntos)** "Para alcanzar el desarrollo en el bicentenario es necesario aumentar significativamente la tasa de inversión".

2. **Trabajo y Ocio (40 puntos)**
Considere el siguiente modelo de crecimiento, que incluye la decisión trabajo-ocio e introduce de manera sencilla capital humano. Las familias deben decidir su dotación de tiempo entre trabajo (l_t), educación (e_t) y ocio ($1-e_t-l_t$). El tiempo de ocio entra en la función de utilidad de la siguiente manera:

$$u(c_t, l_t, e_t) = \log c_t + \log(1-e_t-l_t) \tag{1}$$

Las familias usan el tiempo de educación para acumular capital humano (h_t) de acuerdo a:

$$h_{t+1} = (1-\delta)h_t + e_t \tag{2}$$

y rentan este capital (más su trabajo no calificado l_t) a las firmas. La función de producción (en forma intensiva) es:

$$f(h_t, l_t) = h_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{3}$$

y como no existe capital físico ni inversión, todo el producto va destinado al consumo. Por simplicidad, asuma que no hay crecimiento de la población ni progreso técnico.

   a) Defina un Equilibrio Competitivo Secuencial para esta economía.

   b) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo.

   c) Encuentre los valores de estado estacionario (EE) de h^*, l^*, c^* y e^*.

   Suponga ahora que existe un gobierno, el cual quiere fomentar la educación en esta economía. Para ello, ofrece un subsidio a las familias proporcional al tiempo dedicado a educarse, subsidio que es financiado mediante un impuesto a suma alzada (*lump sum*) a las mismas familias.

d) Defina el nuevo Equilibrio Competitivo para esta economía.

e) Caracterice lo mejor posible el nuevo Equilibrio Competitivo.

f) Encuntre los nuevos valores de EE de h^*, l^*, c^* y e^*.

g) Compare sus resultados con los obtenidos en (c) y evalúe la eficacia del subsidio educativo.

3. **Pago a los factores en el Modelo de Solow (40 puntos)**
Recuerde que en el modelo de Solow el producto Y, viene dado por:

$$Y = F(K, L) \tag{4}$$

donde estamos ignorando los incrementos de productividad; K y L denotan respectivamente capital y trabajo; y la función de producción F exhibe retornos constantes de escala, es creciente en cada uno de sus argumentos, tiene retornos decrecientes en cada uno de los argumentos y cumple con las condiciones de Inada. La razón capital-trabajo se denota mediante $k = K/L$ y la forma intensiva de la función de producción viene dada por

$$y = f(k) \tag{5}$$

donde $f(k) = F(K, 1)$. La dinámica del capital queda caracterizada por:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k \tag{6}$$

donde s, n y δ denotan la tasa de ahorro, tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital, respectivamente. Las tres tasas son exógenas al modelo. En este problema consideramos una economía pobre (es decir, con menos capital que en estado estacionario) y estudiamos como evolucionan los precios de los factores (salario y retornos al capital) camino al estado estacionario.

a) Suponga que el pago al capital r, viene dado por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ y el salario, w, por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$. ¿Bajo que condiciones es apropiado este supuesto?

b) Muestre que $r = f'(k)$ y $w = f(k) - kf'(k)$. Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.

c) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que $rK + wL = F(K, L)$.

d) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.

e) Suponga que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de cambio del pago al capital, $\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r}$, y la tasa de cambio del salario $\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w}$. Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.

f) La tasa de retorno al capital en Chile durante el último año ha sido considerablemente menor que en años anteriores (*v.g.*, IPSA, IGPA). ¿Es posible explicar este fenómeno en base a los resultados de este problema? Justifique.

g) Los salarios reales (medidos correctamente) vienen creciendo sostenidamente en los últimos años, sin que se note una caída en la tasa de crecimiento. Es consistente con los resultados de este problema? Si su respuesta es afirmativa, justifique cuidadosamente. Si es negativa, discuta cuál aspecto excluido del modelo estudiado en este problema puede explicar la aparente discrepancia.

Pauta Control No. 2

1. Comente

   a) Esto no es cierto en estricto rigor. Es cierto que la eliminación de distorsiones resultaría en un nuevo (más alto) estado estacionario y no en una tasa de crecimiento mayor (pues ésta estaría dada por algún elemento como la tasa de crecimiento de la economía). Sin embargo, durante el período de ajuste al nuevo *EE*, la economía crecerá a una tasa mayor que la de estado estacionario. En particular, es posible que Chile haya vivido tasas de crecimiento tan altas como las de los diez años anteriores a 1998 porque se estaba moviendo de un estado estacionario a otro. Habiendo llegado a su nuevo "equilibrio", habría retomado su tasa de crecimiento de largo plazo (alrededor de 3 % - 4 %) .

   b) Falso. Crecer mediante aumentos en la tasa de inversión es más difícil que hacerlo mediante ganancias en eficiencia ya que:

      1. el capital tiene retornos decrecientes, la eficiencia no. De hecho, se necesitan alrededor de 10 puntos adicionales de inversión sobre PIB para generar un par de puntos de mayor crecimiento. Para lo mismo, basta con dos puntos adicionales de eficiencia.

      2. el capital no puede seguir contribuyendo al crecimiento siempre (existe un nivel óptimo de acumulación de capital). Además a mayor inversión menor consumo que es lo que maximiza bienestar. La eficiencia, sin embargo, no se agota y no obliga a sacrificar consumo ni ocio.

2. Trabajo y ocio

   a) (2.5 pts.) Un Equilibrio General Competitivo para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, e_t, l_t, y_t y h_{t+1} y los precios w_t y r_t (salario y precio del arriendo del capital humano, respectivamente) tales que:

      1) Dados $h_0 > 0$, w_t y r_t, las secuencias de c_t, e_t, l_t, y_t y h_{t+1} resuelven el problema de las familias:

$$\begin{array}{lcr} \text{máx} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log c_t + \log(l - e_t - l_t)] & \\ s.a & c_t = w_t l_t + r_t h_t & \forall t \\ & h_{t+1} = (1-\delta) h_t + e_t & \forall t \end{array}$$

      2) En cada período t, dados w_t y r_t, los valores y_t y h_t resuelven el problema de las firmas:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & y_t - w_t l_t - r_t h_t \\ s.a. & y_t = h_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \end{array}$$

      3) En cada período t, hay igualdad entre oferta y demanda.

$$y_t = c_t$$

   b) (10 pts.) El problema de las familias viene dado por:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log c_t + \log(l - e_t - l_t)] - \lambda_{1t}[c_t - w_t l_t - r_t h_t] - \lambda_{2t}[h_{t+1} - (1-\delta)h_t - e_t]$$

   donde las CPO son:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{c_t} - \lambda_{1t} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_t} = -\frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} - \lambda_{1t} w_t = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_t} = -\frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} - \lambda_{2t} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} = -\lambda_{2t} + \lambda_{1t+1} r_{t+1} + \lambda_{2t+1}(1 - \delta) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1t}} = c_t - w_t l_t - r t h_t = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2t}} = h_{t+1} - (1 - \delta)h_t - et = 0 \tag{12}$$

más la condición de transversalidad: $\text{lím}_{t\to\infty} \upsilon_t = 0$, con $\upsilon_t = \prod_{j=t}^{\infty} \frac{\lambda_{2t}}{\lambda_{2t+1}}$. Esta condición garantiza que el valor del stock de capital humano sea cero al "final" del problema; caso contrario, la familia quedará con recursos no utilizados. De 7 y 8:

$$c_t = w_t(1 - e_t - l_t) \tag{13}$$

7 y 9 en 10 y un poco de álgebra:

$$\beta^{t+1}\left[\frac{r_{t+1}}{c_{t+1}} + \frac{1 - \delta}{1 - e_t - l_t}\right] = \frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} \tag{14}$$

y 13 en esta última resulta en la ecuación de Euler del problema:

$$\frac{1}{\beta}\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1}{w_t}[r_{t+1} + (1 - \delta)w_{t+1}] \tag{15}$$

Para encontrar una expresión para l_t, se iguala la ecuación 11 y 13, y haciendo uso de la ecuación 12 y un poco de álgebra se llega a:

$$\frac{1}{l_t} = \left[2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1 - \delta)\frac{h_t}{l_t}\right] + \frac{r_t h_t}{w_t l_t} \tag{16}$$

El problema de la firma se resuelve:

$$L = h_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} - w_t l_t - r_t h_t$$

Tal que de las CPO se obtiene que:

$$r_t - \alpha\left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{-(1-\alpha)} \tag{17}$$

$$w_t = (1 - \alpha)\left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{\alpha} \tag{18}$$

Los valores dados del salario y el pago al capital humano se reemplazan en la ecuación de Euler 15 a continuación:

$$\frac{1}{\beta}\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{\left(\frac{h_{t+1}}{l_{t+1}}\right)^{\alpha}}{(1 - \alpha)\left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{\alpha}}\left[\alpha\left(\frac{h_{t+1}}{l_{t+1}}\right)^{-1} + (1 - \delta)(1 - \alpha)\right] \tag{19}$$

Ahora reemplazamos las ecuaciones 17 y 18 en la ecuación 16 hasta obtener:

$$l_t = \frac{1}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1 - \delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{20}$$

y puesto que $h_t = l_t(\frac{h_t}{l_t})$, entonces:

$$h_t = \frac{\frac{h_t}{l_t}}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{21}$$

De la ecuación 12, y usando la ecuación 21 como la definición para h_t anterior:

$$e_t = \frac{1}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[\frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} \right] \tag{22}$$

Finalmente, dado que se impone el equilibrio competitivo ($y_t = c_t$ y $\prod = 0$), se tiene que:

$$y_t = c_t = \left(\frac{h_t}{l_t} \right)^{\alpha} l_t$$

que junto con la ecuación 20 resulta en:

$$y_t = c_t = \frac{\left(\frac{h_t}{l_t} \right)^{\alpha}}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{23}$$

Las ecuaciones 17 a 23 caracterizan el Equilibrio General Competitivo para esta economía.

c) (10 pts.) Sabemos que en estado estacionario:

$$\begin{aligned} c^* &= c_t = c_{t+1} \\ l^* &= l_t = l_{t+1} \\ h^* &= h_t = h_{t+1} \\ e^* &= e_t = e_{t+1} \end{aligned}$$

En la ecuación 19 y luego de algo de álgebra:

$$\frac{h^*}{l*} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]} \tag{24}$$

De la ecuación 17:

$$r^* = \alpha \left[\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]} \right]^{-(1-\alpha)} \tag{25}$$

De la ecuación 18:

$$w^* = (1-\alpha) \left[\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]} \right]^{\alpha} \tag{26}$$

De la ecuación 20:

$$l^* = \frac{1}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{27}$$

Reemplazando la ecuación 24 en la ecuación 21:

$$h^* = \frac{\alpha\beta}{2(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)] + \delta\alpha\beta + \alpha[1-\beta(1-\delta)]} \tag{28}$$

Reemplazando la ecuación 24 en la ecuación 22:

$$e^* = \frac{\delta\alpha\beta}{2(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)] + \delta\alpha\beta + \alpha[1-\beta(1-\delta)]} \tag{29}$$

Reemplazando la ecuación 24 en la ecuación 23:

$$y^* = c^* = \frac{1}{2+\delta\left[\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]}\right] + \frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]}\right] \tag{30}$$

d) (2.5 pts.) Con gobierno, un Equilibrio General Competitivo para esta economía será un conjunto de secuencias para las cantidades $c_t, e_t, l_t, y_t, h_{t+1}$ y T_t y los precios w_t y r_t (salario y precio del arriendo del capital humano, respectivamente) tales que:

1) Dados $h_0 > 0, T_t, w_t$ y r_t, las secuencias de c_t, e_t, l_t y h_{t+1} resuelven el problema de las familias:

$$\begin{array}{lcr} \text{máx} & \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\log c_t + \log(l - e_t - l_t)] & \\ s.a & c_t + T_t = w_t l_t + r_t h_t + s e_t & \forall t \\ & h_{t+1} = (1-\delta)h_t + e_t & \forall t \end{array}$$

donde s es el subsidio a la educación.

2) En cada período t, dados w_t y r_t, los valores y_t y h_t resuelven el problema de las firmas:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & y_t - w_t l_t - r_t h_t \\ s.a. & y_t = h_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \end{array}$$

3) En cada período t, el gobierno mantiene un presupuesto equilibrado:

$$s e_t = T_t$$

4) En cada período t, hay igualdad entre oferta y demanda.

$$y_t = c_t$$

e) (10 pts.) El problema de las familias viene dado por:

$$L = \text{máx}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\log c_t + \log(l - e_t - l_t)] - \lambda_{1t}[c_t + T_t - w_t l_t + r_t h_t + s e_t] - \lambda_{2t}[h_{t+1} - (1-\delta)h_t - e_t]$$

De donde las CPO son:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{c_t} - \lambda_{1t} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_t} = -\frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} - \lambda_{1t} w_t = 0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_t} = -\frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} - s\lambda_{1t} + \lambda 2t = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} = -\lambda_{2t} + \lambda_{1t+1} r_{t+1} + \lambda_{2t+1}(1-\delta) = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1t}} = c_t + T_t - w_t l_t - r_t h_t - s e_t = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2t}} = h_{t+1} - (1-\delta)h_t - e_t = 0 \tag{36}$$

mas la condición de transversalidad: $\lim_{t\to\infty} \upsilon_t h_t = 0$, con $\upsilon_t = \prod_{j=t}^{\infty} \frac{\lambda_{2t}}{\lambda_{2t+1}}$, con la misma interpretación que en el caso sin gobierno. De la ecuación 31 y 32:

$$c_t = w_t(1 - e_t - l_t) \tag{37}$$

las ecuaciones 31, 32, 33, 34 y 37 más un poco de álgebra, obtenemos la ecuación de Euler:

$$\frac{1}{\beta}\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1}{w_t - s}[r_{t+1} + (1-\delta)(w_{t+1} - s)] \tag{38}$$

Para encontrar una expresión para l_t, se usa la ecuación 37 y 34, el hecho que $T_t = se_t$ y un poco de álgebra se llega a:

$$l_t = \frac{1}{2 + (\frac{h_{t+1}}{l_t}) - (1-\delta)(\frac{h_t}{l_t}) + \frac{r_t h_t}{w_t h_t}} \tag{39}$$

El problema de la firma es idéntico al caso sin gobierno tal que sabemos que:

$$r_t = \alpha \left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{-(1-\alpha)} \tag{40}$$

$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{\alpha} \tag{41}$$

Los valores dados del salario y el pago al capital humano se reemplazan en la ecuación de Euler 38 a continuación:

$$\frac{1}{\beta}\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1}{(1-\alpha)\left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{\alpha} - s}\left[\alpha\left(\frac{h_{t+1}}{l_{t+1}}\right)^{-(1-\alpha)} + (1-\delta)\left[(1-\alpha)\left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{\alpha} - s\right]\right] \tag{42}$$

Las ecuaciones para l_t, h_t, e_t, c_t y y_t son idénticas al caso anterior (las dos últimas) puesto que el gobierno mantiene un presupuesto equilibrado:

$$l_t = \frac{1}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{43}$$

$$h_t = \frac{\frac{h_t}{l_t}}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{44}$$

$$e_t = \frac{1}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t}\right] \tag{45}$$

$$y_t = c_t = \frac{\left(\frac{h_t}{l_t}\right)^{\alpha}}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1-\delta)\frac{h_t}{l_t} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{46}$$

Las ecuaciones 40 a 46 caracterizan el Equilibrio General Competitivo para esta economía con gobierno.

f) (5 pts.) Puesto que en estado estacionario:

$$\begin{aligned} c^* &= c_t = c_{t+1} \\ l^* &= l_t = l_{t+1} \\ h^* &= h_t = h_{t+1} \\ e^* &= e_t = e_{t+1} \end{aligned}$$

En la ecuación 42 y luego de algo de álgebra:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha(\frac{h^*}{l^*})^{-(1-\alpha)}}{(1-\alpha)(\frac{h^*}{l^*})^{\alpha} - s} + (1-\delta) \tag{47}$$

Que da una fórmula implícita para la relación $\frac{h^*}{l^*}$ del tipo:

$$\frac{h^*}{l^*} = g(\alpha, s, \delta, \beta)$$

Así, se pueden expresar las ecuaciones para l^*, h^*, e^*, y^* y c^* se pueden expresar de la misma forma que en la parte (c), salvo por la nueva expresión para la relación $\frac{h^*}{l^*}$. Así:

$$l^* = \frac{1}{2 + \delta g(\alpha, s, \delta, \beta) + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{48}$$

$$h^* = \frac{g(\alpha, s, \delta, \beta)}{2 + \delta g(\alpha, s, \delta, \beta) + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{49}$$

$$e^* = \frac{\delta g(\alpha, s, \delta, \beta)}{2 + \delta g(\alpha, s, \delta, \beta) + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{50}$$

$$y^* = c^* = \frac{(g(\alpha, s, \delta, \beta))^{\alpha}}{2 + \delta g(\alpha, s, \delta, \beta) + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{51}$$

Comparación de Resultados.
Los valores en Estado Estacionario son iguales a diferencia del valor $g(\alpha, s, \delta, \beta)$, por lo que se debe compararla con la razón $\frac{h^*}{l^*}$ obtenida en el caso sin gobierno. Igualando las ecuaciones de Euler 19 y 42 en Estado Estacionario:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{h^*}{l^*}\right)^{-1} + (1-\delta) = \frac{\alpha(g(\alpha, s, \delta, \beta))^{-(1-\alpha)}}{(1-\alpha)(g(\alpha, s, \delta, \beta))^{\alpha} - s} + (1-\delta)$$

donde $\frac{h^*}{l^*}$ es la razón para el caso sin gobierno y $g(\alpha, s, \delta, \beta)$ aquella para el caso con gobierno. Simplificando la expresión anterior se llega a:

$$\frac{h^*}{l^*} = g(\alpha, s, \delta, \beta) - \frac{s}{1-\alpha}(g(\alpha, s, \delta, \beta))^{1-\alpha} \tag{52}$$

De aquí se ve que:

$$\frac{h^*}{l^*} < g(\alpha, s, \delta, \beta)$$

Puesto que la razón de capital humano a trabajo siempre será positiva, al igual que la razón $s/(1-\alpha)$. Así, el subsidio del gobierno aumenta el nivel relativo de capital humano relativo al trabajo. El subsidio es eficaz incentivando la acumulación de capital humano. Este aumento, sin embargo, lleva a que caiga el tiempo dedicado a trabajar (l) tal que el efecto neto sobre el producto y el consumo es ambiguo y dependerL a de la fuerza de los efecto del aumento en la acumulación de capital humano y la del la caída del trabajo.

3. **Pago a los factores en el Modelo de Solow**

a) (5 pts.) Las expresiones:

$$r = \frac{\partial F}{\partial K}$$
$$\omega = \frac{\partial F}{\partial L}$$

sólo se dan en competencia perfecta.

b) (5 pts.) Tenemos que $Y = F(K, L) = LF(K, 1) = Lf(k)$, por lo tanto derivando respecto a L tenemos que $\frac{\partial F}{\partial L} = \omega = f(k) - Lf'(k)\frac{K}{L^2} = f(k) - kf'(k)$.Por otra parte tenemos que si:

$$\max_k F(K, L) - rK - \omega L$$

factorizando por L obtenemos que:

$$\max_k L(f(k) - rk - \omega)$$

La condición de primer orden es $f'(k) = r$

c) (5 pts.) Sabemos que la función tiene retornos constantes a escala, es decir:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

derivando respecto a λ obtenemos que:

$$F_K K + F_L L = F(K, L)$$

sabemos que en competencia perfecta se tiene que $r = F_K$ y $\omega = F_L$. Por lo tanto, bajo los supuestos de competencia perfecta se tiene:

$$rK + \omega L = F(K, L)$$

d) (7.5 pts.) Sabemos que el pago del capital está dado por $r = f(k)$. Para determinar qué sucede con éste pago cuando la economía se aproxima al estado estacionario, derivamos la expresión del salario respecto a k, esto da:

$$\frac{\partial r}{\partial k} = f''(k) < 0$$

es decir a medida que mantenemos fijo el stock de trabajo y aumentamos la cantidad su rentabilidad cae, esto porque cada unidad extra de capital rinde menos. Para determinar qué sucede con el salario, derivamos la expresión del salario respecto a k, esto da:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = -kf''(k) > 0$$

e) (7.5 pts.) Si la función de producción es Cobb-Douglas entonces $Y = F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$. Epxresando la función en términos per cápita se tiene que $y = k^\alpha$. Por lo tanto se tiene que:

$$\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)} = \frac{\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2}\dot{k}}{\alpha k^{\alpha-1}} = (\alpha - 1)\frac{\dot{k}}{k}$$

Por otro lado,

$$\gamma_\omega = \frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)} = \frac{\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-1}\dot{k}}{(1 - \alpha)k^{\alpha-1}} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

f) (5 pts.) Por supuesto, a medida que el capital crece, éste presenta cada vez menores retornos. Por lo tanto la tasa de retorno IPSA cada año debería ser menor.

g) (5 pts.)

$$\gamma_\omega = \alpha\gamma_k$$

Este resultado nos indica que la tasa de crecimiento de los salarios debería ir cayendo en el tiempo. Sin embargo, los datos muestran que viene creciendo constantemente, por lo tanto el resultado teórico no es consistente con los datos observados. El punto es que en este modelo no se incorpora el avance tecnológico, el cual hace aumentar la productividad y por ende, los salarios.