

② definida porque si le sumamos  $2k\pi i$  al log se obtiene

$$f\left(\frac{1}{2\pi i} (\log w + 2k\pi i)\right) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \log w + kT\right) \\ = f\left(\frac{1}{2\pi i} \log w\right)$$

Porque  $f$  tiene período  $T$ .

Por lo tanto  $h$  está bien definida

$$\text{Claramente } h(e^{\frac{2\pi i}{T} z}) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \log e^{\frac{2\pi i}{T} z}\right) = f(z)$$

(de hecho la construiremos para tener la igualdad)

$h$  es analítica porque si  $w_0 \in V \Rightarrow \exists \varepsilon_0$  tq  $D(w_0, \varepsilon_0) \subset V$   
 En el disco  $D(w_0, \varepsilon_0)$  se puede definir un logaritmo analítico  $\Rightarrow h$  es composición de funciones analíticas en  $D(w_0, \varepsilon_0) \Rightarrow h$  analítica en  $D(w_0, \varepsilon_0)$  como  $w_0$  arbitrario  $\Rightarrow h$  analítica en  $V$ .  $\square$

P4)  $u(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^4}\right)$

P5)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[ \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i} \right]$

Veamos donde  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{inz} \stackrel{f_1(z)}{=}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-inz} \stackrel{f_2(z)}{=}$  son analíticas

Consideramos:

$$S(w) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^n$$

$$\sqrt[n]{|C_n|} \leq e^{-r}$$

$$\limsup \sqrt[n]{|C_n|} \leq e^{-r}$$

Radio de convergencia de  $S(w)$  es  $\geq \frac{1}{e^{-r}} = e^r$

Ahora si  $|\operatorname{Im} z| < r$   
 $-r < \operatorname{Im} z < r$

$\Rightarrow$

$$|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} < e^r \\ |e^{-iz}| = e^{\operatorname{Im} z} < e^r$$

$\therefore S(e^{iz}), S(e^{-iz})$  son analíticas si  $|\operatorname{Im} z| < r$

$\Rightarrow f$  analítica

$$\text{Claramente } f(z + 2\pi) = \sum C_n \sin(nz + n \cdot 2\pi) = \sum C_n \sin nz = f(z)$$