

CONTROL 2: MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 2005

Problema 1.

(a) (2.0 pts.) Encuentre la antitransformada de Laplace de:

$$(a.1) \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Solución: Partimos por separar por el método de fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s+1)} &= \frac{1-s}{s^2} + \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \\ &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} - \mathcal{L}(1)(s) + \mathcal{L}(e^{-t})(s) \\ &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(1)(s) + \mathcal{L}(e^{-t} - 1)(s) \\ &= \mathcal{L}(t - 1 + e^{-t})(s) \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2(s+1)} \right) (t) = t - 1 + e^{-t}}$$

$$(a.2) \frac{3e^{-2s}}{3s^2 + 1}.$$

Solución: Arreglamos los términos para usar los teoremas de desplazamiento:

$$\begin{aligned} \frac{3e^{-2s}}{3s^2 + 1} &= \sqrt{3} e^{-2s} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{s^2 + \frac{1}{3}} \\ &= \sqrt{3} e^{-2s} \mathcal{L} \left(\text{sen} \left(t/\sqrt{3} \right) \right) (s) \\ &= \sqrt{3} \mathcal{L} \left(H(t-2) \text{sen} \left(\frac{t-2}{\sqrt{3}} \right) \right) (s) \end{aligned}$$

donde $H(\cdot)$ es la función escalón de Heaviside. Finalmente:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{3e^{-2s}}{3s^2+1} \right) (t) = \sqrt{3} H(t-2) \text{sen} \left(\frac{t-2}{\sqrt{3}} \right)}$$

(b) (2.0 pts.) Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & 2 \leq t \end{cases}$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

Solución: Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación. Para eso, primero calculamos la transformada del lado derecho, que lo llamamos $f(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^1 t e^{-st} dt + \int_1^2 (2-t) e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^1 - \frac{t e^{-st}}{s} \Big|_0^1 - 2 \frac{e^{-st}}{s} \Big|_1^2 + \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_1^2 + \frac{t e^{-st}}{s} \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{e^{-s} - 1}{s} \right)^2 \end{aligned}$$

Ahora calculamos la transformada del lado derecho:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau \right) (s) &= s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) + 2\mathcal{L}(y) + \frac{1}{s}\mathcal{L}(y)(s) \\ &= \frac{(s+1)^2}{s}\mathcal{L}(y) - 1 \end{aligned}$$

por lo que, despejando, queda:

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s(1+s)^2} + \frac{s}{(1+s)^2}$$

Sólo resta calcular la antitransformada, para esto notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(1+s)^2} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{(1+s)^2} \\ &= \mathcal{L}(1 - e^{-t} - t e^{-t})(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{s}{(1+s)^2} &= \frac{1}{1+s} - \frac{1}{(1+s)^2} \\ &= \mathcal{L}(e^{-t} - t e^{-t})(s) \end{aligned}$$

de donde, finalmente:

$$y(t) = H(t-2)(1 + (1-t)e^{2-t}) - 2H(t-1)(1 - te^{1-t}) + 1 - 2te^{-t}$$

Lo anterior se puede escribir como una función por partes:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - 2te^{-t} & 0 \leq t < 1 \\ 2te^{-t}(e - 1) - 1 & 1 \leq t < 2 \\ e^{2-t} - te^{-t}(e^2 - 2e + 2) & 2 \leq t \end{cases}$$

(c) (2.0 pts.) Resuelva el problema con condición inicial

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Solución: Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación usando las condiciones iniciales y el hecho que $\mathcal{L}(\delta(t - \pi))(s) = e^{-s\pi}$ para obtener:

$$s^2\mathcal{L}(y) + 2s\mathcal{L}(y) + 2\mathcal{L}(y) = e^{-s\pi}$$

y luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{e^{-s\pi}}{(s+1)^2 + 1} \\ &= e^{-s\pi} \mathcal{L}(e^{-t} \text{sen}(t))(s) \\ &= \mathcal{L}(H(t - \pi) e^{\pi-t} \text{sen}(t - \pi))(s) \end{aligned}$$

de donde se concluye:

$$y(t) = -H(t - \pi) e^{\pi-t} \text{sen}(t)$$