

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

PROFESOR: FELIPE ÁLVAREZ

1. GUÍA DE PROBLEMAS

P1. Determine cuales de las siguientes ecuaciones son exactas y resuelva las que lo sean

a) $(x + \frac{2}{y})dy + ydx = 0$

b) $(\sin x \tan y + 1)dx + \cos x \operatorname{cosec}^2 y dy = 0$

c) $(2y^2 - 4x + 5)dx = (4 - 2y + 4xy)dy$

d) $(y + y \cos xy)dx + (x + x \cos xy)dy = 0$

e) $dx = \frac{y}{1-x^2y^2}dx + \frac{x}{1-x^2y^2}dy$

f) $(\sin x \sin y - x \exp^y)dy = (\exp^y + \cos x \cos y)dx$

P2. Encuentre la solución general de

a) $y'' + 4y = 3 \sin x$

b) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$

c) $y'' - y - 6y = 20 \exp^{-2x}$

d) $y'' + k^2y = \sin bx$, con k y b constantes positivas.

P3. Resuelva

a) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$

b) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1^2)$

P4. Considere la ecuación

$$x^{(3)} + ax^{(2)} + bx^{(1)} + cx = \exp^{ut}$$

donde a, b, c, u son constantes reales o complejas. Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de esta ecuación. Muestre que si u es tal que $p(u) = 0$, $p'(u) \neq 0$ entonces esta ecuación tiene solución particular

$$x(t) = \frac{1}{p^{(1)}(u)} t \exp^{ut}$$

P5. Resuelva usando la Transformada de Laplace

a) $y'' + y' = 3x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

b) $y'' + 2y' + 5y = 3 \exp^{-x} \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

c) $y'' + 2y' + 2y = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

P6. Si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución no trivial de $x' = Ax$ entonces

$$\frac{d}{dx}(|u|) = \frac{1}{|u|} \langle u, Au \rangle$$

P7. Supongamos que la matriz A tiene valores propios reales distintos. Sea $t \rightarrow \phi(t, x_0)$ la solución de $x' = Ax$ con valor inicial $\phi(0, x_0) = x_0$.

a) Probar que para cada t fijo

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \phi(t, y) = \phi(t, x_0)$$

b) Encuentre constantes positivas c y k tales que

$$|\phi(t, y_0) - \phi(t, x_0)| \leq c \exp^{kt} |y_0 - x_0|$$

P8. Pruebe que el sistema dinámico en coordenadas polares

$$\begin{aligned} \theta' &= 1 \\ r' &= \begin{cases} r \sin(1/r) & r > 0 \\ 0 & r = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

tiene un punto de equilibrio estable en el origen.

P9. Mostrar mediante un ejemplo que si f un campo vectorial C^1 en \mathbb{R}^n no lineal, tal que $f(0) = 0$, puede ocurrir que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ para toda las soluciones de $x' = f(x)$ sin que los valores propios de $Df(0) = 0$ tengan parte real negativa.

P10. Una trayectoria $x(t)$, $0 \leq t$ se dice *recurrente* si $x(t_n) \rightarrow x(0)$ para alguna sucesión $t_n \rightarrow \infty$. Demuestre que un sistema tipo gradiente no posee trayectorias recurrentes no constantes.

P11. Sea $x(t)$ una solución de $x' = -\nabla V(x)$. Muestre que $V(x(t))$ es una función decreciente de t .

P12. Pruebe que $x' = Ax$ con A matriz simétrica, es un sistema tipo gradiente.

P13. Considere la ec diferencial

$$x'' + f(x) = 0$$

Estudie el diagrama de fases del sistema plano asociado

$$\begin{aligned} x' &= \nu \\ \nu' &= -f(x) \end{aligned}$$

Indicación: Muestre que es un sistema hamiltoniano.