Resumen Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
MA26A
Ecuaciones Lineales de orden superior

Profesor: Leonardo Sanchez, Auxiliares: Jorge Lemus,Oscar Peredo

29 de marzo de 2005

1. SOLUCIONES DE LA EDO LINEAL DE ORDEN 2

Definición 0.1. *Una EDO lineal de segundo orden es de la forma*

$$y'' + \overline{a}_1(x)y' + \overline{a}_0(x)y = 0 \quad (H)$$

o bien

$$y'' + \overline{a}_1(x)y' + \overline{a}_0(x)y = \overline{Q} \quad (S)$$

A coeficientes constantes se tiene que $\overline{a}_1(x) = \overline{a}_1$ *y* $\overline{a}_0 = \overline{a}_0$ *en .*

Teorema 0.1. *La ecuación (H) o (S) a coeficientes constantes con valores característicos* λ_1, λ_2 *soluciones de* $p(\lambda) = 0$*, tiene por solucion homogénea* y_h*:*

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in, \lambda_1 \neq \lambda_2 : y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in: y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

c) $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw \in \mathbb{C} \backslash (w \neq 0) : y_h = C_1 e^{\sigma} \operatorname{sen} wx + C_2 e^{\sigma} \cos wx$

2. METODO DE VARIACION DE PARAMETROS (METODO DE LAGRANGE) (COEFICIENTES CONSTANTES)

Se calcula la solucion homogenea para una EDO de la forma

$$P(D)y = f(x)$$

con $P(D) = D^2 + a_1 D + a_0$, $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.
La solucion homogenea sera de la forma

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Paa encontrar la solucion particular, se impone que debe ser de la forma:

$$y_p = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

con C_1, C_2 funcions a determinar.
Se calcula el Wronskiano de y_1, y_2, es decir,

$$W(x, y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Finalmente se calculan C_1, C_2:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x, y_1, y_2)} dx \\ C_2(x) &= \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x, y_1, y_2)} dx \end{aligned}$$

3. FORMULAS DE ABEL Y LIOUVILLE (COEFICIENTES VARIABLES)

Formulas ligadas al metodo Çonociendo una solucion y_1, encontrar y_2". Para (H) se tienen las siguientes formulas:

- FORMULA DE ABEL

$$W(x, y_1, y_2) = Cexp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right)$$

  De esta formula, conociendo y_1, se tiene que:

$$y_2 = y_1 \tilde{C} + y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) du$$

- FORMULA DE LIOUVILLE
  Si se supone $y_2 = v(x) y_1$, entonces:

$$y_2 = y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) du$$

  con $v(x) = C \int \frac{1}{y_1^2} exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) du$.

4. TRANSFORMACION DE EDO ORDEN N A UN SISTEMA VECTORIAL
Se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Derivando cada nueva variable, se tiene:

$$\begin{aligned}
z_1'(x) &= y'(x) = & z_2(x) \\
z_2'(x) &= y''(x) = & z_3(x) \\
& \vdots & \\
z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = & -\overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) - \ldots - \overline{a}_0(x)y(x) + \overline{Q} \\
&= & -\overline{a}_{n-1}(x)z_n(x) - \ldots - \overline{a}_0(x)z_1(x) + \overline{Q}
\end{aligned}$$

Con esto, el sistema queda de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}'}_{\vec{z}'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_0(x) & -\overline{a}_1(x) & -\overline{a}_3(x) & \ldots & -\overline{a}_{n-1}(x) \end{pmatrix}}_{A(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\vec{z}(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \overline{Q} \end{pmatrix}}_{\vec{b}(x)} \quad (1)$$

Si se tienen las condiciones iniciales, es decir, $y(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ equivale a tener las condiciones iniciales en el sistema $z_1(x_0), \ldots, z_n(x_0)$ y el problema se escribe

$$\begin{aligned}
\vec{z}'(x) &= A(x)\vec{z}(x) + \vec{b}(x) \\
\vec{z}(x_0) & \quad \text{(condiciones iniciales)}
\end{aligned}$$

con $x \in I$ intervalo no reducido a un punto.

5. ESTRUCTURA DE LA SOLUCION GENERAL DE (S)
Vamos a estudiar la estructura de la solución general de (S). Para ello comenzamos con la homogénea:

$$y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \overline{a}_0(x)y = 0$$

Definición 0.2. $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) : y$ *es solución de (S)* $\}$

Definición 0.3. $\mathcal{H} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) : y$ *es solución de (H)* $\}$

Teorema 0.2. *$\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$ de dimensión n.*

Teorema 0.3. *Si y_p es solución de (S) entonces $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{H}$.*

Corolario 0.1. *La solución general de $\mathcal{S}$ se escribe de la forma*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_p$$

donde $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones l.i. de (H), y_p es solcucion particular cualquier de (S) y las $C_i \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias que dependeran de las n condiciones iniciales.

6. FORMULA DE ABEL EN ORDEN N

Teorema 0.4 (Fórmula de Abel). *Si $W(x, y_1, \ldots, y_n)$ esta formado por $y_1, \ldots, y_n$ soluciones de (H), entonces*

$$W(x, y_1, \ldots, y_n) = C \exp\left(-\int \overline{a}_{n-1}(x)dx\right)$$

con $C \in$.

7. CASO HOMOGENEO, COEFICIENTES VARIABLES, ORDEN N
   No hay un metodo general para encontrar las soluciones. Lo que se puede decir es que conociendo n-1 l.i. podemos encontrar otra l.i. con la formula de Abel.

8. CASO NO HOMOGENEO, COEFICIENTES VARIABLES, ORDEN N (VARIACION DE PARAMETROS)
   Conociendo n soluciones l.i. de (H), se sabe que $y_p = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$. Utilizando el Wronskiano de orden N, se deduce que:

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(s, y_1, \ldots, y_n)}{W(s, y_1, \ldots, y_n)} ds$$

   donde W_i corresponde a W pero con la i-esima columna cambiada por $(0, \ldots, 0, \bar{Q})^t$.

   FORMULA DE GREEN

$$\begin{aligned} y_p &= \int \frac{\overline{Q}(s)}{W(s, y_1, \ldots, y_n)} \sum_{i=1}^{n} y_i(x)(-1)^{n+i} \tilde{W}_i(s, y_1, \ldots, y_n) ds \\ &= \int \frac{\overline{Q}(s)}{W(s, y_1, \ldots, y_n)} \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(s) & \ldots & y_n(s) \\ y_1'(s) & \ldots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix}}_{=R(x,s)} \end{aligned}$$

   Definiendo la Función de Green como $G(x,s) = \dfrac{R(x,s)}{W(s, y_1, \ldots, y_n)}$, se tiene que

$$y_p = \int G(x,s) \overline{Q}(s) ds$$

9. CASO HOMOGENEO, COEFICIENTES CONSTANTES, ORDEN N (OPERADORES ANULADORES)

   a) El operador D^n anula a cualquier polinomio de grado $n-1$, es decir,

$$D^n(a_{n-1}x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = 0$$

b) El operador $(D-\alpha)^n$ anula a cada una de las siguientes expresiones y su combinacion lineal:

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}$$

c) El operador $(D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2))^n$ anula cada una de las siguientes expresiones y su combinacion lineal:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

10. CASO NO HOMOGENEO, COEFICIENTES CONSTANTES, ORDEN N (METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS)
Una EDO no homognea a coeficientes constantes se escribe de la forma

$$P(D)y \;=\; f(x)$$

Donde $f(x)$ puede ser una combinacion lineal o producto de:

a) Una constante

b) Un polinomio en la variable x

c) Una funcion exponencial $e^{\alpha x}$

d) Una funcion trigonometrica $\operatorname{sen}(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$

Se encuentra l operador anulador de $f(x)$, $\mathrm{P}_1(D)$, es decir, $P_1(D)f(x)=0$, luego,

$$P_1(D)P(D)y = 0 \ (1)$$

Habiendo encontrado la solucion homogenea previamente, se deduce la solucion particular del problema (1). Las constantes de la solucion particular se determinan imponiendo que esta solucion paticular satisface la ecuacion (1) y se igualan coeficientes.