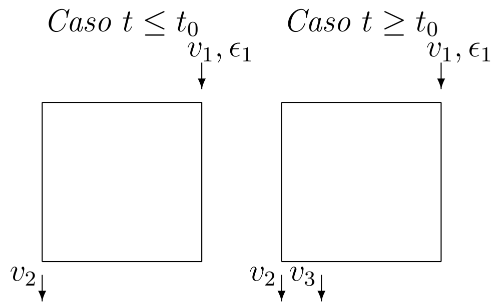
Problema Resuelto
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A
Estanque con Solución Salina (Caso general)

Profesor: Leonardo Sanchez, Auxiliares: Jorge Lemus,Oscar Peredo

19 de abril de 2005

Problema 1. *Un estanque de capacidad Ω litros contiene inicialmente Ω_0 litros de una solución salina de concentración ϵ_0 gramos por litro.*
En $t = 0$ entra por la parte superior del estanque una solución de concentración ϵ_1 gramos por litro a una velocidad de v_1 litros por minuto. Al mismo tiempo, por la parte inferior del estanque, empieza a salir solución a v_2 litros por minuto.
Cuando el estanque llega a la mitad de su capacidad (la cantidad de solución va aumentando) se abre una segunda llave que deja escapar solución a v_3 litros por minuto.
Determine la cantidad de sal (en gramos) dentro del estanque para todo instante t (en minutos) inferior a N horas.
Note que se debe cumplir $\frac{\Omega}{2} > \Omega_0$ y $V(t) < \Omega$ para todo $t \in [0, 60N]$ (el tiempo t esta en minutos).



Solución 1. *Sean $V(t)$ el volumen (en litros) de la solución y $x(t)$ la cantidad (en gramos) de sal en el estanque en un instante t (en minutos).*
Del enunciado se desprende que:

$$\begin{aligned} V(0) &= \Omega_0 \\ x(0) &= \epsilon_0 \Omega_0 \end{aligned}$$

El volumen en todo instante antes de llevar a la mitad de su capacidad se expresa de la forma:

$$V(t) = \Omega_0 + (v_1 - v_2)t$$

Luego, el tiempo en el cual el estanque llega a la mitad de su capacidad es:

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \Omega_0 + (v_1 - v_2)t_0 \\ \frac{\Omega}{2} &= \Omega_0 + (v_1 - v_2)t_0 \\ t_0 &= \frac{\Omega - 2\Omega_0}{2(v_1 - v_2)} \end{aligned}$$

- *La variacion de sal ([g/min]) para* $t \in [0, t_0]$ *se expresa como la diferencia entre el flujo de sal ([g/min]) que entra menos el flujo de sal ([g/min]) que sale, matematicámente:*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \textit{Flujo de sal entrante} - \textit{Flujo de sal saliente} \\ x'(t)[g/min] &= \epsilon_1[g/l]v_1[l/min] - \frac{x(t)}{V(t)}[g/l]v_2[l/min] \\ x'(t) &= \epsilon_1 v_1 - \frac{x(t)}{V(t)}v_2 \\ x'(t) &= \epsilon_1 v_1 - \frac{x(t)v_2}{\Omega_0 + (v_1 - v_2)t} \end{aligned}$$

Se trata de una EDO lineal de orden 1 no homogenea a coeficientes variables:

$$x' + \left(\frac{v_2}{\Omega_0 + (v_1 - v_2)t}\right)x = \epsilon_1 v_1$$

El factor integrante es de la forma:

$$\begin{aligned} \exp\left(\int \frac{v_2}{\Omega_0 + (v_1 - v_2)t}dt\right) &= \exp\left(\frac{v_2}{v_1 - v_2}\ln(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)\right) \\ &= (\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}} \end{aligned}$$

Luego, la EDO queda de la forma:

$$\begin{aligned} x'(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}} + \\ \left(\frac{v_2}{\Omega_0 + (v_1 - v_2)t}\right)x(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}} &= \epsilon_1 v_1(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}} \\ \left(x(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}}\right)' &= \epsilon_1 v_1(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}} \\ x(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}} &= \int \epsilon_1 v_1(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}}dt + C \end{aligned}$$

Despejando $x(t)$ *obtenemos:*

$$\begin{aligned} x(t) &= (\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_2 - v_1}} \int \epsilon_1 v_1(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}}dt \\ &\quad + C(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_2 - v_1}} \\ x(t) &= (\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_2 - v_1}} \frac{\epsilon_1 v_1}{(v_1 - v_2)\left(\frac{v_2}{v_1 - v_2} + 1\right)}(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2} + 1} \\ &\quad + C(\Omega_0 + (v_1 - v_2)t)^{\frac{v_2}{v_2 - v_1}} \end{aligned}$$

Condiciones iniciales: $x(0) = \epsilon_0\Omega_0$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_0\Omega_0 &= \Omega_0^{\frac{v_2}{v_2-v_1}} \frac{\epsilon_1 v_1}{(v_1-v_2)\left(\frac{v_2}{v_1-v_2}+1\right)} \Omega_0^{\frac{v_2}{v_1-v_2}+1} + C\Omega_0^{\frac{v_2}{v_2-v_1}} \\
\epsilon_0\Omega_0 &= \epsilon_1\Omega_0 + C\Omega_0^{\frac{v_2}{v_2-v_1}} \\
C &= (\epsilon_0-\epsilon_1)\Omega_0^{\frac{v_2}{v_1-v_2}+1}
\end{aligned}
$$

- *La variación de sal para* $t \geq t_0$ *es:*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \textit{Flujo de sal entrante} - \textit{Flujo de sal saliente} \\
x'(t)\textit{[g/min]} &= \epsilon_1\textit{[g/l]}v_1\textit{[l/min]} - \frac{x(t)}{V(t)}\textit{[g/l]}(v_2+v_3)\textit{[l/min]} \\
x'(t) &= \epsilon_1 v_1 - \frac{x(t)}{V(t)}(v_2+v_3) \\
x'(t) &= \epsilon_1 v_1 - \frac{x(t)(v_2+v_3)}{\Omega_0+(v_1-v_2)t}
\end{aligned}
$$

El volumen ahora disminuye para $t \geq t_0$ *segun la ecuacion:*

$$
\begin{aligned}
V(t) &= V(t_0) + (v_1-v_2-v_3)(t-t_0) \\
&= \frac{\Omega}{2} + (v_1-v_2-v_3)(t-t_0)
\end{aligned}
$$

La variacion de sal en $t \geq t_0$ *es:*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \epsilon_1 v_1 - \frac{x(t)}{V(t)}(v_2+v_3) \\
x'(t) &= \epsilon_1 v_1 - \frac{x(t)(v_2+v_3)}{\frac{\Omega}{2}+(v_1-v_2-v_3)t}
\end{aligned}
$$

La condicion inicial para esta EDO es:

$$
\begin{aligned}
x(t_0) &= (\Omega_0+(v_1-v_2)t_0)^{\frac{v_2}{v_2-v_1}} \frac{\epsilon_1 v_1}{(v_1-v_2)\left(\frac{v_2}{v_1-v_2}+1\right)} (\Omega_0+(v_1-v_2)t_0)^{\frac{v_2}{v_1-v_2}+1} \\
&\quad + C(\Omega_0+(v_1-v_2)t_0)^{\frac{v_2}{v_2-v_1}} \\
x(t_0) &= P_0
\end{aligned}
$$

Aplicando el metodo del factor integrante nuevamente y evaluando en la condicion inicial $x(t_0) = P_0$*, se obtiene el valor de* $x(t)$ *para* $t \geq t_0$*. Encontrar la condicion entre* t *y* Ω *para que* $V(t) < \Omega$ *para todo* $t \in [0, 60N]$*, de lo contrario el estanque se rebalsaría.*