

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Cálculo Vectorial, Variable Compleja y Ecuaciones en Derivadas Parciales

APUNTES PARA EL CURSO MA26B  
MATEMÁTICAS APLICADAS

Felipe Alvarez  
Juan Diego Dávila  
Roberto Cominetti  
Héctor Ramírez C.

Agosto 2005



# Prefacio

El cálculo diferencial e integral de funciones de variable compleja es una materia fundamental del análisis matemático, tanto por su interés en matemáticas puras como por su utilidad para modelar y resolver problemas en ingeniería. Una gran variedad de estos últimos se expresan en términos de ecuaciones en derivadas parciales (EDP), para cuya resolución los métodos basados en variable compleja son de gran eficacia.

El objetivo de estos apuntes es proporcionar los elementos básicos de la teoría de funciones de variable compleja e ilustrar su utilización en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, tal como se expone en el curso de Matemáticas Aplicadas. Esta es una de las asignaturas del segundo año de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Estos apuntes se basan en las notas escritas en colaboración con mi colega el Profesor Roberto Cominetti, y se han beneficiado de una activa participación del Profesor Juan Diego Dávila. Buena parte del material referente a la teoría de EDP se debe a este último. Agradezco a ambos las múltiples e interesantes discusiones que hemos tenido sobre diversos aspectos del curso.

Mis más sinceros agradecimientos a Claudio Pizarro, quien participó activamente en la confección de este apunte al transcribir en LaTeX buena parte de las notas manuscritas, elaborar todas las figuras y sugerir varias ideas para mejorar la presentación. Sin su ayuda, la versión actual de los apuntes no existiría. También debo agradecer a Regina Mateluna por su eficiente y siempre bien dispuesta colaboración.

Finalmente, quisiera agradecer el financiamiento proporcionado por el Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile y por el proyecto Fondef IDEA+.

Felipe Alvarez

Agosto 2004



# Índice general

<b>I</b>	<b>Ecuaciones en Derivadas Parciales</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>Ecuaciones lineales de segundo orden</b>	<b>3</b>
1.1.	Ecuaciones parabólicas y fenómenos de difusión . . . . .	3
1.1.1.	Conducción del calor en una barra unidimensional . . . . .	3
1.1.2.	Conducción del calor en un cuerpo . . . . .	5
1.1.3.	Expansión de un gas en un medio isótropo y homogéneo . . . . .	6
1.2.	Ecuaciones hiperbólicas y fenómenos oscilatorios . . . . .	7
1.2.1.	Oscilaciones de una cuerda . . . . .	7
1.2.2.	Oscilaciones de una membrana . . . . .	8
1.2.3.	Vibraciones longitudinales de una barra . . . . .	9
1.3.	Ecuaciones elípticas y fenómenos estacionarios . . . . .	9
1.3.1.	Membrana en reposo . . . . .	9
1.3.2.	Potencial de campo eléctrico . . . . .	10
1.4.	Condiciones iniciales y de borde . . . . .	11
1.5.	Otras ecuaciones de la física . . . . .	12
1.6.	Principio de superposición . . . . .	13
1.7.	La ecuación de superficies mínimas . . . . .	14
<b>2.</b>	<b>Separación de variables y series de Fourier</b>	<b>17</b>
2.1.	Ejemplo modelo: ecuación del calor . . . . .	17
2.1.1.	Primera etapa: separar variables . . . . .	17
2.1.2.	Segunda etapa: imponer condiciones de borde . . . . .	19
2.1.3.	Tercera etapa: imponer la condición inicial . . . . .	20
2.2.	Series de Fourier . . . . .	22
2.3.	Aplicación a la resolución de EDPs . . . . .	27
2.3.1.	Ecuación del calor en una barra finita: condiciones de borde de tipo Dirichlet . . . . .	27
2.3.2.	Ecuación del calor en una barra finita. Condiciones de borde de tipo Neumann . . . . .	29
2.3.3.	Ecuación del calor en barra finita. Condiciones mixtas . . . . .	31

2.3.4.	Ecuación de Laplace en banda semi-infinita. . . . .	33
2.3.5.	Oscilaciones en una membrana rectangular . . . . .	34
2.3.6.	Ecuación de Laplace en un rectángulo . . . . .	37
2.3.7.	Ecuación de ondas. Cuerda finita. . . . .	38
<b>3.</b>	<b>La transformada de Fourier</b>	<b>41</b>
3.1.	Definición y el teorema de inversión . . . . .	41
3.2.	Propiedades fundamentales . . . . .	42
3.2.1.	La transformada de una derivada . . . . .	42
3.2.2.	El teorema de convolución . . . . .	43
3.2.3.	Propiedades de la transformada de Fourier . . . . .	44
3.3.	Ejemplos de transformadas de Fourier . . . . .	44
3.4.	Aplicación a la resolución de EDPs . . . . .	47
3.4.1.	Ecuación del calor en una barra infinita . . . . .	47
3.4.2.	Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición en el extremo de tipo Dirichlet . . . . .	49
3.4.3.	Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición de Neumann . . . . .	50
3.4.4.	Problema de Dirichlet en un semiplano . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Tópicos adicionales en EDPs</b>	<b>53</b>
4.1.	Propiedad de la media para funciones armónicas . . . . .	53
4.2.	Principio del máximo para funciones armónicas . . . . .	54
4.3.	Principio del máximo para la ecuación del calor . . . . .	55
4.4.	Unicidad para la ecuación de Laplace y el calor . . . . .	56

## Parte I

# Ecuaciones en Derivadas Parciales





# Capítulo 1

## Ecuaciones lineales de segundo orden

### 1.1. Ecuaciones parabólicas y fenómenos de difusión

#### 1.1.1. Conducción del calor en una barra unidimensional

Consideraremos el problema de la difusión de calor en una barra delgada que se encuentra perfectamente aislada por su superficie lateral.

Si la barra es lo suficientemente delgada como para suponer que la temperatura es constante sobre cualquier sección transversal, el estado del sistema está descrito por una función escalar  $u = u(t, x)$ , la cual proporciona el valor de la temperatura de la barra al instante  $t$  y en la posición longitudinal  $x$ .

Supondremos que  $u(t, x)$  y todas las otras funciones que utilizaremos son tan regulares como sea necesario para que ciertas expresiones que involucran sus derivadas estén bien definidas.

Es bien sabido que, en un cuerpo térmicamente conductor, el calor fluye desde las zonas de mayor temperatura hacia las de menor temperatura. Más aún, de acuerdo a la ley de Fourier, la rapidez a la cual el calor fluye entre zonas contiguas es proporcional a la diferencia de temperaturas por unidad de longitud, y el factor de proporcionalidad depende de las propiedades conductoras del cuerpo en cuestión.

Así, en el instante  $t$ , la rapidez con que el calor  $Q$  fluye desde un punto  $x$  hacia uno a su derecha, digamos  $x + \delta x$  con  $\delta x \ll 1$ , puede aproximarse por

$$\frac{dQ}{dt} \approx k(x) \frac{u(t, x) - u(t, x + \delta x)}{\delta x},$$

donde  $k = k(x) > 0$  es un coeficiente de *conductividad térmica* que depende del material del cual está hecho la barra. En el límite se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} = k(x) \left( - \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{u(t, x + \delta x) - u(t, x)}{\delta x} \right) = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x).$$

Notemos que  $dQ/dt > 0$  cuando  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) < 0$ . Esto es consistente pues si  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) < 0$  entonces la temperatura es (localmente) decreciente, de modo que su valor es menor a la derecha del punto  $x$ , y por lo tanto el calor fluye hacia la derecha. Análogamente, si  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) > 0$  entonces el valor de la temperatura es mayor a la derecha del punto  $x$ , y por lo tanto el calor fluye hacia la izquierda, esto es,  $dQ/dt < 0$ .

Sea  $(x_1, x_2)$ , con  $x_1 < x_2$ , un intervalo de observación correspondiente a una sección longitudinal de la barra. Sea  $(t_1, t_2)$ , con  $t_1 < t_2$ , un intervalo correspondiente a un lapso de tiempo. Como la barra está térmicamente aislada por su superficie lateral, el intercambio de calor sólo ocurre a través de los puntos extremos  $x_1$  y  $x_2$  del intervalo  $(x_1, x_2)$ . En virtud de lo anterior, la cantidad neta de calor  $Q_1$  que entra a la sección  $(x_1, x_2)$  en el lapso  $(t_1, t_2)$  está dada por

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} [-k(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_1) + k(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_2)] dt.$$

Pero, usando el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir

$$k(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_2) - k(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] dx,$$

y en consecuencia

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] dx dt.$$

Al interior de la barra puede haber una *fente de calor*, cuya tasa de producción de calor por unidad de tiempo y de longitud está dada por una función  $F = F(t, x)$ . Por lo tanto, la cantidad neta de calor producida en el segmento  $(x_1, x_2)$  durante el lapso  $(t_1, t_2)$  está dada por

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(t, x) dx dt.$$

Por otra parte, la cantidad de calor que entra al segmento  $(x_1, x_2)$ , junto con el que se produce en su interior, provocará un cambio en la distribución de temperatura sobre dicho segmento en el lapso de tiempo que va de  $t_1$  a  $t_2$ . La cantidad de calor por unidad de longitud necesaria para un cambio  $\delta u = u(t_2, x) - u(t_1, x)$  de la temperatura en el punto  $x$  está dada por

$$c(x)[u(t_2, x) - u(t_1, x)],$$

donde el factor de proporcionalidad  $c = c(x) > 0$  es la *capacidad calorífica específica*<sup>1</sup>. Luego, la cantidad de calor total necesaria para el cambio de temperatura en el segmento  $(x_1, x_2)$  es

$$Q_3 = \int_{x_1}^{x_2} c(x)[u(t_2, x) - u(t_1, x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dt dx,$$

y éste debe ser igual a la cantidad neta de calor que entra y que se produce en el segmento  $(x_1, x_2)$  durante el lapso  $(t_1, t_2)$ , esto es,

$$Q_3 = Q_1 + Q_2.$$

Más explícitamente,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c(x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] + F(t, x) \right] dx dt.$$

De la arbitrariedad de los puntos  $x_1 < x_2$  y  $t_1 < t_2$ , un argumento clásico de localización<sup>2</sup> permite concluir que  $u = u(t, x)$  necesariamente satisface la ecuación en derivadas parciales

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + F(t, x).$$

Si la barra es de material *homogéneo*, es decir,  $k(x) = k$  y  $c(x) = c$  se obtiene

$$u_t = \alpha u_{xx} + f(t, x), \tag{1.1}$$

donde  $\alpha = k/c$ ,  $f = F/c$ , y, con el fin de simplificar la notación, hemos utilizado las notaciones

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Al coeficiente  $\alpha > 0$  se le llama *difusividad térmica* del material.

<sup>1</sup>Densidad de capacidad calorífica por unidad de longitud.

<sup>2</sup>Por ejemplo, considere  $t_2$  y  $x_2$  como variables y derive la expresión con respecto a  $t_2$  y  $x_2$  sucesivamente, “eliminando” así la integral temporal primero y la espacial después.

### 1.1.2. Conducción del calor en un cuerpo

En esta sección deduciremos la ecuación del calor en el caso general de un material ocupando una cierta región  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , que suponemos abierta y no vacía. Denotemos por  $u(t, x, y, z)$  la temperatura del material en el punto  $(x, y, z) \in \Omega$  y el tiempo  $t$ . Supondremos que la función

$$u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es suficientemente regular.

Un modelo sencillo pero válido en muchas situaciones, conocido como la ley de Fourier, supone que la cantidad de calor  $\delta Q$  que atraviesa un elemento de superficie  $\delta A$  orientada según el campo de normales  $\hat{n}$ , en un lapso de tiempo  $\delta t$  viene dado por

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -k \nabla u \cdot \hat{n} \delta A,$$

donde

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix},$$

es decir  $\nabla u$  es el gradiente de  $u$  con respecto a las variables espaciales.  $k > 0$  denota el coeficiente de conducción térmica del material. Observemos que dado que  $k$  es positivo, el calor fluye de zonas de alta temperatura a zonas de baja temperatura, pues  $-\nabla u$  es la dirección de máximo descenso de la función  $u$ .

#### DIBUJO?

Sea  $\omega \subset \subset \Omega$ , es decir,  $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega \subset \Omega$ , y realicemos un balance de calor en esta zona, suponiendo inicialmente que no hay fuentes de calor dentro del cuerpo. De acuerdo a la ley de Fourier, la cantidad de calor que fluye a través de la frontera de  $\omega$  hacia el exterior (flujo neto de calor que sale de  $\omega$ ) viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} &= - \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot \hat{n} dA \\ &= - \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

y haciendo  $\delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}.$$

Por otra parte existe una relación entre la cantidad de calor  $q$  almacenada en un elemento de volumen  $\delta V$  y la temperatura en esta región:

$$q = c u \rho \delta V,$$

donde  $c$  es el calor específico y  $\rho$  es la densidad del material. Derivando con respecto a  $t$  se deduce que la variación de la cantidad de calor por unidad de tiempo en  $\delta V$  es

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \delta V.$$

De este modo la variación de calor almacenado en  $\omega$  por unidad de tiempo es

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\omega} \frac{\partial q}{\partial t} dV = \iiint_{\omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV.$$

Si no hay fuentes de calor en  $\Omega$  entonces la variación de calor en  $\omega$  por unidad de tiempo es igual a la cantidad de calor que entra en  $\omega$  por unidad de tiempo. De lo anterior se obtiene

$$\iiint_{\omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}.$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S} = \iiint_{\omega} \operatorname{div}(k \nabla u) dV,$$

y se deduce que

$$\iiint_{\omega} \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla u) \right) dV = 0.$$

Esto último es válido para todo  $\omega \subset\subset \Omega$ . Por un argumento de localización, si todas las funciones en el integrando son continuas, se concluye

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla u) = 0 \quad \text{sobre } [0, T] \times \Omega,$$

que es la ecuación del calor para un cuerpo general. Si el cuerpo es homogéneo, es decir  $c(x, y, z) = c_0$ ,  $\rho(x, y, z) = \rho_0$  y  $k(x, y, z) = k_0$  entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k_0}{c_0 \rho_0} \operatorname{div}(\nabla u) = 0.$$

Definiendo  $\alpha = \frac{k_0}{c_0 \rho_0}$  y recordando que

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

llegamos a la ecuación del calor para un cuerpo homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0 \quad \text{sobre } [0, T] \times \Omega, \quad (1.2)$$

donde  $\alpha > 0$  es una constante. Aquí  $\Delta$  el operador Laplaciano con respecto a las variables espaciales.

La ecuación del calor se complementa con condiciones de borde adicionales, que serán explicitadas en la sección 1.4.

Cuando en el interior del cuerpo hay fuentes distribuidas generadoras de calor, esto suele modelarse mediante una función densidad por unidad de volumen

$$\begin{aligned} f : [0, T] \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, x, y, z) &\rightarrow f(t, x, y, z), \end{aligned}$$

de modo que el calor instantáneo generado en una subregión  $\omega \subset \Omega$  está dado por

$$\iiint_{\omega} f(t, \vec{r}) dV(\vec{r}).$$

Suponiendo que  $f$  es continua y retomando lo que se hizo anteriormente, se deduce que

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla u) = f \quad \text{en } [0, T] \times \Omega,$$

en el caso general no homogéneo. En el caso homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = \frac{f}{c_0 \rho_0} \quad \text{en } [0, T] \times \Omega.$$

### 1.1.3. Expansión de un gas en un medio isótropo y homogéneo

Supongamos que una gas ocupa una región porosa  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  en la cual se mueve de puntos de alta concentración a baja concentración, proceso que se denomina difusión. Denotemos por  $u(t, x, y, z)$  la concentración del gas en el instante  $t$  y el punto  $(x, y, z)$ . Entonces bajo la *ley de Nernst* y suponiendo que el material es homogéneo e isotrópico, se puede verificar que  $u$  satisface

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \text{en } \Omega, \quad (1.3)$$

donde  $a$  es una constante. La ley de Nernst es análoga a la ley de Fourier para la conducción de calor.

## 1.2. Ecuaciones hiperbólicas y fenómenos oscilatorios

### 1.2.1. Oscilaciones de una cuerda

Consideremos una cuerda elástica de longitud  $L$  sometida a una cierta tensión y cuyo movimiento se confina a un plano. Modelaremos la cuerda como una curva y por simplicidad supondremos que ésta se puede representar en cada instante  $t$  como el grafo de una función  $u(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir,  $u$  es una función de dos variables

$$u : [0, T] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Con el objeto de simplificar la derivación de la ecuación que satisface  $u$  haremos los siguientes supuestos:

1. las oscilaciones de la cuerda son pequeñas y cada punto de ésta se mueve verticalmente,
2. la cuerda está sometida a una tensión cuya componente horizontal  $\tau > 0$  es constante y uniforme
3. las fuerzas de fricción pueden ser despreciadas,
4. en una primera aproximación despreciaremos el efecto de fuerzas externas como la gravedad.

Dado  $x \in (0, L)$  y  $\delta x > 0$  denotemos por  $\alpha$  el ángulo entre la cuerda y el eje  $x$  en el punto  $(x, u(x))$  y por  $\alpha'$  el ángulo en  $(x + \delta x, u(x + \delta x))$ . Llamemos  $\tau_1$  a la tensión de la cuerda en  $(x, u(x))$  y  $\tau_2$  a la tensión en  $(x + \delta x, u(x + \delta x))$ . Realicemos un balance de fuerza en el segmento de cuerda correspondiente a  $(x, x + \delta x)$ . Como suponemos que el movimiento de la cuerda es vertical no hay aceleración horizontal, es decir

$$\tau_1 \cos \alpha = \tau_2 \cos \alpha' = \tau. \quad (1.4)$$

Por otro lado, en la dirección vertical

$$\tau_2 \sin \alpha' - \tau_1 \sin \alpha = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde  $\rho$  es la densidad lineal de masa de la cuerda, que supondremos constantes, y  $\delta l$  es la longitud de ésta entre  $x$  y  $x + \delta x$ . Dividiendo ambos lados por  $\tau$  y utilizando (1.4) obtenemos

$$\tan \alpha' - \tan \alpha = \frac{\rho}{\tau} \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

Pero  $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_x$  y  $\tan \alpha' = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\delta x}$ , por lo que, dividiendo la ecuación anterior por  $\delta x$  y haciendo  $\delta x \rightarrow 0$  encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde hemos utilizado  $\frac{\delta l}{\delta x} \rightarrow 0$  cuando  $\delta x \rightarrow 0$ . Si se quiere incorporar el efecto de fuerzas externas, de manera análoga se puede verificar que  $u$  satisface

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(t, x), \quad (1.6)$$

donde  $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} > 0$ ,  $F(t, x) = \frac{1}{\tau} f(x, t)$  y  $f(x, t)$  es la densidad lineal de fuerzas externas.

Las condiciones adicionales naturales para complementar esta ecuación son de dos tipos:

1. Condiciones iniciales en un instante  $t = 0$  que describen la posición y velocidad de la cuerda en cada punto  $x \in [0, L]$ . Es decir,

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, L],$$

y

$$u_t(0, x) = v_0(x) \quad \forall x \in [0, L].$$

2. Condiciones de borde sobre los puntos 0 y  $L$ .

Observemos que a diferencia de las ecuaciones parabólicas, desde un punto de vista físico al menos, es necesario en las ecuaciones hiperbólicas imponer condiciones iniciales sobre  $u$  y  $u_t$ .

Las condiciones de borde deben reflejar las condiciones físicas a las que está sujeta la cuerda y pueden ser de varios tipos. Por ejemplo, una condición de borde de la forma

$$u(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

quiere decir que el extremo  $x = 0$  de la cuerda está fijo a una altura 0. Otro ejemplo es

$$u_x(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.7)$$

que significa que el extremo  $x = 0$  está libre. En efecto, retomando (1.5) con  $x = 0$  y si suponemos que la componente vertical de la fuerza neta en  $x = 0$  vale cero, vemos que

$$\tau_2 \sin \alpha = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Usando que  $\tau_2 \sin \alpha' \sim \tau \frac{\partial u}{\partial x} \big|_{\delta x}$  y haciendo  $\delta x \rightarrow 0$  resulta (1.7).

Una tercera posibilidad es

$$u(t, 0) = \frac{1}{h} u_x(t, 0) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.8)$$

que modela la situación en que el extremo  $x = 0$  está sujeto a un resorte de constante elástica  $k = h\tau$ . En esta situación

$$\tau_2 \sin \alpha - (\text{fuerza ejercida por el resorte en } x = 0) = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

es decir

$$\tau_2 \sin \alpha - ku|_{x=0} = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Nuevamente, haciendo  $\delta x \rightarrow 0$  encontramos (1.8)

### 1.2.2. Oscilaciones de una membrana

El caso de las oscilaciones de una membrana es muy similar al de las oscilaciones de una cuerda. Veamos brevemente cómo encontrar la EDP en esta situación.

La membrana se modela como una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y por simplicidad supondremos que esta superficie se puede representar mediante una función

$$u(t, x, y) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

de modo tal que en cada instante  $t$  la membrana corresponde a la superficie parametrizada por  $(x, y) \mapsto u(t, x, y)$ . Nuevamente suponemos

1. las oscilaciones de la membrana son pequeñas y cada punto de ésta se mueve verticalmente,
2. la membrana está sometida a una tensión superficial  $\tau > 0$  constante y uniforme
3. las fuerzas de fricción pueden ser despreciadas,
4. en una primera aproximación despreciaremos el efecto de fuerzas externas como la gravedad.

Sean  $(x, y) \in \Omega$  y  $\delta x > 0$ ,  $\delta y > 0$ . Estudiemos las fuerzas que actúan sobre la porción de la membrana sobre el cuadrado  $[x, x + \delta x] \times [y, y + \delta y]$ . Haciendo un balance de las fuerzas verticales y utilizando las mismas aproximaciones que en la sección 1.2.1 podemos escribir

$$(\text{contribución de las aristas paralelas al eje } x) = \tau \delta x \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\delta y} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y \right)$$

$$(\text{contribución de las aristas paralelas al eje } y) = \tau \delta y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right)$$

Luego por la ley de Newton

$$\rho \delta x \delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \delta x \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\delta y} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y \right) + \tau \delta y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right),$$

donde  $\rho$  es la densidad superficial de masa. Dividiendo por  $\delta x \delta y$  y haciendo  $\delta x \rightarrow 0$  y  $\delta y \rightarrow 0$  encontramos

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) = c^2 \Delta u$$

donde  $c = \sqrt{\tau/\rho}$  y  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$  es el Laplaciano de  $u$  con respecto a las coordenadas espaciales.

Si hay fuerzas externas actuando en la membrana, análogamente se encuentra

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + F(t, x, y) \quad (1.9)$$

donde  $F(t, x, y) = \frac{1}{\tau} f(t, x, y)$  y  $f(t, x, y)$  es la densidad superficial de fuerzas externas actuando sobre la membrana.

### 1.2.3. Vibraciones longitudinales de una barra

Consideremos una barra delgada de un material elástico de longitud  $L$  y supongamos que el origen está ubicado en uno de los extremos. Las deformaciones longitudinales de esta barra las describimos mediante una función  $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  de modo tal que si una partícula que ocupa inicialmente (en una situación de equilibrio) la posición  $x \in [0, L]$ , en el instante  $t$  se sitúa en  $x + u(x, t)$ .

Modelando la barra como una familia de  $N$  resortes con masas y constantes elásticas idénticas, y luego considerando  $N \rightarrow \infty$ , es posible deducir que  $u$  satisface la siguiente EDP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T),$$

donde  $c > 0$  depende de las propiedades de la barra (densidad de masa y constante elástica), y  $f$  es (excepto por una constante) una densidad lineal de fuerzas externas.

## 1.3. Ecuaciones elípticas y fenómenos estacionarios

### 1.3.1. Membrana en reposo

Retomando la sección 1.2.2, si la membrana está en reposo de (1.9) vemos que la función  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  debe satisfacer la ecuación

$$\Delta u + F(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.10)$$

que se conoce como la *ecuación de Poisson*.

En el caso particular cuando  $F = 0$ , se obtiene la *ecuación de Laplace*

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (1.11)$$

Una función que es solución de la ecuación de Laplace se dice una función armónica.

### 1.3.2. Potencial de campo eléctrico

En esta sección escribiremos  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ . El campo eléctrico generado por una cantidad finita de cargas  $q_j$  con ubicadas en los puntos  $\vec{y}_j$  viene dada por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}_j}{\|\vec{x} - \vec{y}_j\|^3},$$

donde  $\epsilon_0$  la permitividad del vacío.

Es fácil verificar que  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  y por lo tanto existe una función escalar  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Cuando las cargas se distribuyen continuamente de acuerdo a una densidad volumétrica  $\rho(\vec{y})$  el campo eléctrico en un punto  $\vec{x}$  cualquiera se puede escribir

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{y}. \quad (1.12)$$

Para dar sentido a esta integral supondremos que  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y que  $\rho(\vec{y}) = 0$  si  $\|\vec{y}\| \geq R_0$ , donde  $R_0 > 0$  es una constante. Notemos que se trata de una integral impropia pero convergente (el integrando se indefin en  $\vec{y} = \vec{x}$ ).

El campo eléctrico (1.12) también proviene de un potencial, es decir,

$$\vec{E} = -\nabla\phi. \quad (1.13)$$

Más aún, se puede dar una fórmula *explícita* para  $\phi$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} d\vec{y}.$$

Sea  $\omega \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto acotado no vacío cuya frontera  $\partial\omega$  es una superficie regular. Queremos calcular el flujo de  $\vec{E}$  a través de  $\partial\omega$ , es decir

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial\omega} \left( \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{y} \right) d\vec{S}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \left( \iint_{\partial\omega} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{S}(\vec{x}) \right) d\vec{y}. \end{aligned}$$

Utilizando apropiadamente el teorema de Gauss se puede probar que

$$\iint_{\partial\omega} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{S}(\vec{x}) = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \vec{y} \in \omega \\ 0 & \text{si } \vec{y} \notin \omega. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\iint_{\partial\omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\omega} \rho(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Aplicando el teorema de la divergencia al campo  $\vec{E}$  y recordando (1.13) obtenemos

$$\iiint_{\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV - \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\omega} \rho dV = 0$$



es decir

$$\iiint_{\omega} \left( \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \right) dV = 0.$$

Como lo anterior se tiene para todo  $\omega$ , se concluye que el integrando debe ser nulo, es decir

$$-\Delta \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (1.14)$$

Notemos que esta ecuación es una Poisson (1.10) y en ausencia de carga ésta última queda como

$$\Delta \phi = 0$$

la cual resulta ser una ecuación de Laplace (1.11).

Hemos visto que estas dos últimas ecuaciones modelan diversos sistemas físicos. Lo que diferencia un problema de otro es el significado físico de las variables y las condiciones iniciales y de bordes, tema a tratar en la siguiente sección.

## 1.4. Condiciones iniciales y de borde

En esta sección veremos cómo complementar las ecuaciones en derivadas parciales antes mencionadas, es decir, daremos condiciones que definen y caracterizan los problemas.

En todos los ejemplos anteriores, la situación física se describe mediante una variable de estado o función  $u$  que puede ser escalar o vectorial y que depende de variables *espaciales*  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$  o  $3$ ) y en algunos casos  $u$  depende de una variable adicional  $t$  que se interpreta como el tiempo. Este es el caso en los problemas que llamamos de evolución como las ecuaciones parabólicas de la sección 1.1 y las hiperbólicas de sección 1.2. En esta situación supondremos que  $t \in [t_0, T]$ .

Las EDP's se complementan básicamente con dos tipos de condiciones adicionales:

### ■ Condiciones de borde

Estas condiciones aparecen tanto en problemas de evolución como en ecuaciones estacionarias. Hay diversas alternativas según el sistema físico que se esté modelando.

- Condición de borde tipo Dirichlet

Supongamos, para fijar ideas, que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  y denotemos por  $\partial\Omega$  la frontera de este conjunto. De esta forma, en el caso en que  $u$  no depende de  $t$  la condición de borde de tipo Dirichlet viene dada por

$$u(x, y, z) = g(x, y, z) \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \partial\Omega$$

y si  $u$  depende de  $t$

$$u(t, x, y, z) = g(x, y, z) \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \partial\Omega \text{ y todo } t \in [t_0, T],$$

donde

$$g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{es una función conocida}$$

En el caso más general  $g$  puede depender del tiempo.

- Condiciones de borde de tipo Neumann

Las condiciones de este tipo se caracterizan por venir representadas de la forma

$$\nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(t, \cdot) = h(\cdot) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \forall t \in [t_0, T]$$

donde  $\hat{n}$  representa la normal exterior a  $\Omega$  y donde  $h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función conocida (dato). En un caso más general  $h$  puede depender del tiempo.

- Condiciones mixtas

Esta clase de condiciones vienen caracterizadas por combinaciones de condiciones del tipo Dirichlet y Neumann sobre porciones de la frontera.

- Condiciones **iniciales**

En lo que respecta a las condiciones iniciales, éstas tienen sentido sólo en problemas de evolución y se dan en un instante  $t_0$  con el objeto de describir el campo tratado (campo de temperaturas, campo eléctrico, etc.) en  $t_0$  sobre todo  $\Omega$ . La condición inicial viene típicamente dada por algo del tipo

$$u(t_0, x, y, z) = u_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega,$$

donde  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es dato.

Cabe destacar que habrá que imponer tantas condiciones iniciales como el orden de la derivada temporal de  $u$  en la ecuación, es decir, si en la ecuación que describe el proceso estudiado aparece la segunda derivada temporal de  $u$ , se tendrá que imponer dos condiciones iniciales. Una de estas será como la antes mencionada y la segunda usualmente tendrá relación con la primera derivada temporal de la función en el instante  $t_0$ , por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x, y, z) = v_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

y así sucesivamente, donde la función  $v_0$  es dato.

Por ejemplo, en el caso de la conducción del calor en una región  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  (ver la sección 1.1.2), donde  $u$  representa la distribución de temperaturas, la condición de borde tipo Dirichlet corresponde al caso en que esta distribución se conoce sobre la frontera del dominio. Por otro lado, en la condición de borde tipo Neumann es el flujo de calor puntual el que constituye un dato. Más precisamente, recordemos que el flujo de calor por unidad de área y tiempo está dado por

$$-k \nabla u \cdot \hat{n} = -k \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = -kh,$$

donde  $h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función conocida y  $k$  representa la conductividad térmica.

## 1.5. Otras ecuaciones de la física

### 1. Ecuación de Navier-Stokes

En dinámica de fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto no lineal de ecuaciones en derivadas parciales que rigen el movimiento del fluido en cuestión. Estas se encuentran considerando la masa, el momentum y balances de energía para un elemento de volumen infinitesimal en movimiento, sobre el cual se pueden producir tensiones tangenciales (debido a la viscosidad).

Sea  $\vec{u}(x, y, z, t)$  el campo de velocidades del fluido y  $p(x, y, z, t)$  la presión. Luego la ecuación para fluidos compresibles viene dada por

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho F - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad del fluido,  $F$  es la densidad volumétrica de fuerzas externas (por ejemplo la gravedad),  $\rho$  es la densidad y  $\frac{D\vec{u}}{Dt}$  es la aceleración del elemento de fluido, también conocida como *derivada material*, la cual viene expresada por

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u},$$

o por componentes, escribiendo  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , la componente  $i$ -ésima de  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$  viene dada por

$$\left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right]_i = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial z}.$$

En los fluidos incompresibles, la ecuación de continuidad es  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ , y, por consiguiente la ecuación anterior se reduce a

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho F - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}.$$

## 2. Ecuación de Schrödinger para una partícula

En mecánica cuántica existe lo que se denomina la dualidad ente ondas y partículas. La descripción de una partícula viene dada por una función de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$  que tiene valores en los números complejos, es decir  $\Psi(\vec{r}, t) \in \mathcal{C}$  y  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \bar{\Psi}(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$  se interpreta como la función densidad de probabilidad de encontrar la partícula en la posición  $\vec{r}$  en el instante  $t$ .

De la teoría de la mecánica cuántica se deduce que la función  $\Psi$  debe satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.15)$$

donde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  con  $h$  la constante de Planck,  $m$  es la masa de la partícula y  $V$  es una función que representa el potencial al cual está sometido la partícula. El Laplaciano en esta ecuación es solamente con respecto a las variables espaciales y por eso la notación  $\Delta_{\vec{r}}$ . Usualmente esta ecuación se acompaña de la condición (probabilística)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1.$$

Notemos que (1.15) representa un sistema de dos ecuaciones reales en derivadas parciales, siendo las incógnitas las partes real e imaginaria de  $\Psi$ .

## 3. Ecuaciones de Maxwell

En la teoría de electromagnetismo, existen cuatro ecuaciones fundamentales que permiten visualizar lo que sucede con el campo eléctrico  $\vec{E}$ , el vector desplazamiento  $\vec{D}$ , el flujo eléctrico  $\vec{J}$  y el campo magnético  $\vec{B}$ . Estas ecuaciones son las ecuaciones de Maxwell, las cuales son

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

donde  $\mu_0$  es una constante (la permeabilidad del vacío). Estas ecuaciones suelen complementarse con leyes constitutivas para formar lo que se denomina un sistema cerrado de ecuaciones.

Cada una de estas ecuaciones entrega información sobre los campos tratados, por ejemplo de la tercera ecuación se puede concluir que  $\vec{B}$  genera  $\vec{E}$  (de donde se deduce la ley de inducción). De este set también se puede concluir que las líneas de campo magnético son cerradas, el flujo de  $\vec{B}$  es conservativo y así sucesivamente.

# 1.6. Principio de superposición

Recordemos brevemente la noción del principio de superposición para ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.). Consideremos una E.D.O. lineal descrita por

$$Ly = 0 \quad \text{en un intervalo } I = (a, b)$$

donde  $L : C^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$  es un operador diferencial lineal de orden  $n$ . El principio de superposición dice que: “Toda combinación lineal finita de soluciones de una E.D.O. lineal homogénea, es también solución”, es decir

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in \text{Ker}(L) \Rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2 \in \text{Ker}(L)$$

o también

$$L y_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow L \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) = 0$$

La noción de operadores diferenciales lineales es fácilmente extendible al caso de operadores actuando sobre funciones de varias variables, es decir sobre funciones  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Por ejemplo consideremos el operador  $L = \Delta$  (Laplaciano) que actúa  $L : C^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$  mediante  $Lu = \Delta u$ . En este contexto se amplía la teoría y se puede demostrar que el principio de superposición es también válido para las E.D.P.'s lineales.

Al igual que en ecuaciones diferenciales ordinarias las soluciones de una EDP lineal no homogénea se pueden descomponer en una solución de la homogénea y una solución particular.

## 1.7. La ecuación de superficies mínimas

En esta sección presentamos una deducción de la ecuación de superficies mínimas como un ejemplo de una ecuación no lineal.

La ecuación (1.10) que modela una membrana en reposo se dedujo suponiendo que las deformaciones son pequeñas. Es interesante estudiar la ecuación resultante sin hacer esta hipótesis, lo que por simplicidad haremos en el caso que no hay fuerzas externas. Supondremos que la membrana es elástica, que está en equilibrio de fuerzas y está sometida a una tensión  $T$  que es constante. Con el fin de utilizar esta información imaginamos que “cortamos” una parte de la membrana, obteniendo una (pequeña) superficie  $S$  cuya frontera  $\partial S$  es una curva cerrada en  $\mathbb{R}^3$ . Denotemos por  $\hat{\tau}$  el vector tangente a  $\partial S$  y por  $\hat{n}$  el vector normal unitario a  $S$  orientado en dirección del eje  $z$ . Dado que  $(x, y) \mapsto u(t, x, y)$  parametriza  $S$ , podemos escribir

$$\hat{n} = \frac{1}{\|\hat{n}\|} \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\|\hat{n}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Orientemos  $\hat{\tau}$  de modo que sea consistente con la orientación de  $S$  para el teorema de Stokes. De este modo el vector

$$\hat{\tau} \times \hat{n},$$

apunta fuera de  $S$ , es perpendicular a  $\hat{\tau}$  y tangente a la membrana. Sobre  $S$  actúa una fuerza a lo largo de  $\partial S$  ejercida por el complemento de ésta que viene dada por

$$T(\hat{\tau} \times \hat{n}).$$

De este modo, la fuerza neta sobre  $S$  que le ejerce el resto de la membrana es

$$\vec{F} = \int_{\partial S} T(\hat{\tau} \times \hat{n}) \, dr.$$

Sea  $\hat{e}$  un vector (constante) unitario en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces

$$\vec{F} \cdot \hat{e} = T \int_{\partial S} (\hat{\tau} \times \hat{n}) \cdot \hat{e} \, dr = T \int_{\partial S} (\hat{n} \times \hat{e}) \cdot \hat{\tau} \, dr.$$

Empleando el teorema de Stokes y la notación

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \hat{e} &= T \iint_S [\vec{\nabla} \times (\hat{n} \times \hat{e})] \cdot \hat{n} dA = T \iint_S [(\vec{\nabla} \cdot \hat{e})\hat{n} - (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{e}] \cdot \hat{n} dA \\ &= -T \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})(\hat{e} \cdot \hat{n}) dA = -T \hat{e} \cdot \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} dA. \end{aligned}$$

Luego

$$\vec{F} = -T \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} dA.$$

Pensando en  $\delta S$  como una pequeña superficie en torno a punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de área  $\delta A$ , escribamos como  $\delta \vec{F}$  la fuerza ejercida por el resto de la membrana sobre  $\delta S$ , esto es

$$\delta \vec{F} = -T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} \delta A + o(\delta A).$$

Si no hay fuerzas externas actuando sobre la membrana, como ésta está en reposo la ley Newton establece que

$$\delta \vec{F} = 0$$

y por lo anterior

$$-T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} \delta A + o(\delta A) = 0.$$

Dividiendo por  $\delta A$  y haciendo  $\delta A \rightarrow 0$  obtenemos

$$-T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} = 0.$$

Recordemos que  $u$  no depende de  $z$ , por lo que

$$-\vec{\nabla} \cdot \hat{n} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right),$$

donde

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Luego la ecuación para  $u$  queda

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) = 0. \quad (1.16)$$

Esta ecuación se conoce también como la *ecuación de superficies mínimas*.

La relación entre la ecuación (1.16) y la ecuación de Laplace (1.11) es que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, se puede aproximar  $\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$  por 1, y en este caso (1.16) se reduce a

$$\Delta u = 0.$$



## Capítulo 2

# Separación de variables y series de Fourier

### 2.1. Ejemplo modelo: ecuación del calor

Consideremos el problema de difusión de calor en una barra delgada de longitud  $L > 0$ , compuesta por un material homogéneo e isotrópico de coeficiente de difusividad térmica  $\alpha > 0$ , y que se encuentra perfectamente aislada por su superficie lateral, y sin fuentes de calor externas actuando dentro de la barra, es decir  $f(x) = 0$  en (1.1). Tal como se dedujo en la sección 1.1.1, la EDP que modela esta situación es

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

La incógnita  $u = u(t, x)$  es la temperatura al instante  $t$  y en la posición  $x$  sobre la barra. Si suponemos que sus extremos se mantienen a temperatura constante igual a 0, entonces  $u$  satisface la condición de borde de tipo Dirichlet homogéneo

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad t > 0. \quad (2.2)$$

Consideraremos además la condición inicial

$$u(0, x) = f(x) \quad 0 < x < L. \quad (2.3)$$

Para resolver (2.1) bajo (2.2) y (2.3), aplicaremos el *método de separación de variables*, el que describiremos detalladamente a continuación.

#### 2.1.1. Primera etapa: separar variables

El método se inicia buscando soluciones no triviales de (2.1) que sean de la forma

$$U(t, x) = T(t)X(x). \quad (2.4)$$

Se introducen así dos nuevas incógnitas,  $T(t)$  y  $X(x)$ , y por lo tanto necesitaremos dos ecuaciones para determinarlas. Sustituyendo (2.4) en (2.1), obtenemos

$$T'(t)X(x) = \alpha T(t)X''(x) \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

Como sólo nos interesan soluciones no triviales, se requiere que  $X(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (0, L)$ . Deducimos de (2.5) que para todo  $t > 0$  se tiene

$$T'(t) = \alpha \lambda_1 T(t),$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)}.$$

Similarmente, para todo  $x \in (0, L)$  se tiene

$$X''(x) = \lambda_2 X(x),$$

donde

$$\lambda_2 = \frac{T'(t_0)}{\alpha T(t_0)}$$

y  $t_0 > 0$  es tal que  $T(t_0) \neq 0$ . En consecuencia, si ahora tomamos cualquier par  $(t, x)$  tal que  $T(t) \neq 0$  y  $X(x) \neq 0$ , lo anterior conduce a

$$\alpha \lambda_1 = \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_2,$$

donde la segunda igualdad proviene de (2.5).

De este modo, se deduce que  $T(t)$  y  $X(x)$  satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} T'(t) + \alpha \lambda T(t) &= 0, & t > 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x < L, \end{aligned}$$

para una constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Dado un valor para el parámetro  $\lambda$ , se deduce de (2.6) que

$$T(t) = C e^{-\alpha \lambda t},$$

para una constante  $C \in \mathbb{R}$ , la cual es no nula pues buscamos soluciones no triviales.

Por otra parte, como aplicación de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, sabemos que la solución general de la ecuación de segundo orden (2.6) se expresa como una combinación lineal de dos funciones fundamentales, cuya forma depende del signo de  $\lambda$ . Más precisamente, como el polinomio característico asociado a (2.6) está dado por  $p(m) = m^2 + \lambda$ , y éste tiene como raíces<sup>1</sup>  $m_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$ , obtenemos que:

- Si  $\lambda < 0$  entonces  $m_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$ , luego la solución general de (2.6) está dada por

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\lambda = 0$  entonces  $m = 0$  es raíz de multiplicidad 2, y en consecuencia

$$X(x) = C_1 + C_2 x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\lambda > 0$  entonces  $m_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$  y por lo tanto

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Observación 2.1.1.** Cuando  $\lambda \neq 0$ , una forma de evitar tener que considerar los casos  $\lambda < 0$  y  $\lambda > 0$  por separado consiste en utilizar la función exponencial compleja cuando corresponda. En efecto, supongamos que  $\lambda > 0$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \\ &= C_1 (e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x})/2 + C_2 (-i)(e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x})/2 \\ &= (C_1 - iC_2)/2 e^{i\sqrt{\lambda}x} + (C_1 + iC_2)/2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= \tilde{C}_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \tilde{C}_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Aquí utilizamos la raíz cuadrada en el cuerpo de los complejos.



Como  $i\sqrt{\lambda} = \sqrt{-1}\sqrt{\lambda} = \sqrt{-\lambda}$ , de lo anterior deducimos que podemos escribir la solución general de la forma

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

donde los coeficientes  $C_1, C_2$  vienen dados por

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \text{ si } \lambda < 0$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \text{ si } \lambda > 0$$

y los coeficientes complejos  $C_1$  y  $C_2$  son uno el conjugado del otro.  $\square$

Sustituyendo las expresiones así obtenidas para  $T(t)$  y  $X(x)$  en (2.4), se construyen soluciones de (2.1) en variables separadas que son de la forma

$$U_\lambda(t, x) = e^{-\alpha\lambda t} (C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}), \quad (2.6)$$

cuando<sup>2</sup>  $\lambda \neq 0$ , mientras que para  $\lambda = 0$  se tiene

$$U_0(t, x) = C_1 + C_2 x.$$

Notemos que tenemos dos tipos de grados de libertad: el primero asociado al parámetro  $\lambda$ ; el segundo, a los coeficientes  $C_1, C_2$ . Como veremos más adelante, esta suerte de “indeterminación” de la solución, que se debe a que hasta ahora sólo hemos utilizado la ecuación (2.1), nos permitirá imponer la condición de borde (2.2) y la inicial (2.3) a combinaciones lineales de soluciones de este tipo.

### 2.1.2. Segunda etapa: imponer condiciones de borde

A continuación buscaremos soluciones no triviales de (2.1) en variables separadas que satisfagan la condición de borde (2.2). Esto restringirá los valores admisibles para  $\lambda$  a un subconjunto numerable de  $\mathbb{R}$ .

En primer lugar, observamos que si  $\lambda$  es el parámetro introducido anteriormente entonces el caso  $\lambda = 0$  queda descartado. En efecto, tomando  $U_0(t, x) = C_1 + C_2 x$ , deducimos de  $U_0(t, 0) = 0$  que  $C_1 = 0$ , lo que junto con  $U_0(t, L) = 0$  implica que  $C_2 = 0$ , obteniendo así la solución trivial.

Busquemos entonces  $\lambda \neq 0$  de modo tal que exista una función  $U_\lambda$  de la forma (2.6), que no sea idénticamente nula y que satisfaga

$$U_\lambda(t, 0) = U_\lambda(t, L) = 0, \quad \forall t > 0.$$

De  $U_\lambda(t, 0) = 0$  deducimos que

$$e^{-\alpha\lambda t} (C_1 + C_2) = 0, \quad \forall t > 0,$$

y, como  $e^{-\alpha\lambda t} > 0$ , se tiene

$$C_2 = -C_1.$$

Luego, para alguna constante  $C \in \mathbb{C}$  (más aun  $C$  es un imaginario puro, pues  $C_1$  y  $C_2$  eran uno el conjugado del otro y  $C_1 = -C_2$ ), que se supone no nula<sup>3</sup>, tenemos

$$U_\lambda(t, x) = C e^{-\alpha\lambda t} (e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}), \quad (2.7)$$

e imponiendo  $U_\lambda(t, L) = 0$ , obtenemos

$$e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0. \quad (2.8)$$

<sup>2</sup>Cuando  $\lambda > 0$ , utilizamos la función exponencial compleja y coeficientes complejos.

<sup>3</sup>Recordemos que nos interesan soluciones no triviales.

Esta última relación debe interpretarse como una ecuación para  $\lambda$  debido a que  $L > 0$  es un dato del problema. Recordando que consideramos la función exponencial de variable compleja cuando  $\lambda > 0$  y recordando su periodicidad, (2.8) conduce a

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-\lambda}L} = e^{-\sqrt{-\lambda}L} &\Leftrightarrow e^{2\sqrt{-\lambda}L} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{-\lambda}L = i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \lambda = (k\pi/L)^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como nos interesa  $\lambda \neq 0$  y además las soluciones para  $k$  y  $-k$  coinciden, basta que  $k$  recorra todos los enteros positivos para obtener todos los valores posibles para  $\lambda$ , esto es

$$\lambda_k = (k\pi/L)^2, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (2.9)$$

y tenemos que las soluciones en variables separadas correspondientes (2.7) son de la forma

$$\begin{aligned} U_{\lambda_k}(t, x) &= C_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \left[ e^{ik\pi x/L} - e^{-ik\pi x/L} \right] \\ &= C_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} 2i \operatorname{sen}(k\pi x/L) \\ &= A_k \Phi_k(t, x), \end{aligned}$$

como  $A_k := 2iC_k$ , el cual pertenece a  $\mathbb{R}$  pues  $C_k$  es un imaginario puro, se tiene

$$\Phi_k(t, x) = e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x/L). \quad (2.10)$$

La figura 2.1 ilustra los casos  $k = 1$  y  $k = 2$ . Hemos obtenido así una familia  $\{\Phi_k(t, x)\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  de *soluciones fundamentales* de la ecuación (2.1) que satisfacen la condición de borde (2.2).

En la tercera etapa del método, veremos cómo imponer la condición inicial (2.3).

**Observación 2.1.2.** Antes de continuar, es interesante observar que lo realizado aquí puede interpretarse como la resolución de un *problema de valores propios del tipo Sturm-Liouville*. En efecto, a partir de lo realizado en la primera etapa del método, deducimos que para que la solución en variables separadas (2.4), supuesta no trivial, satisfaga la condición de borde (2.2) se requiere que

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases}$$

para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definiendo el operador diferencial lineal

$$\begin{aligned} A: V &\rightarrow C([0, L]) \\ f &\mapsto Af := -\frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

sobre el espacio vectorial  $V = \{f \in C^2(0, L) \cap C([0, L]) \mid f(0) = f(L) = 0\}$ , el problema anterior puede escribirse  $AX = \lambda X$ . Los escalares  $\lambda_k$  dados por (2.9) son los valores propios del operador  $A$ , mientras que los espacios propios correspondientes son unidimensionales y están generados por las funciones propias  $X_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x/L)$ .  $\square$

### 2.1.3. Tercera etapa: imponer la condición inicial

Consideremos ahora la condición inicial (2.3). Para motivar lo que sigue, comencemos por el caso en que

$$f(x) = A \operatorname{sen}(k_0 \pi x/L) \quad (2.11)$$

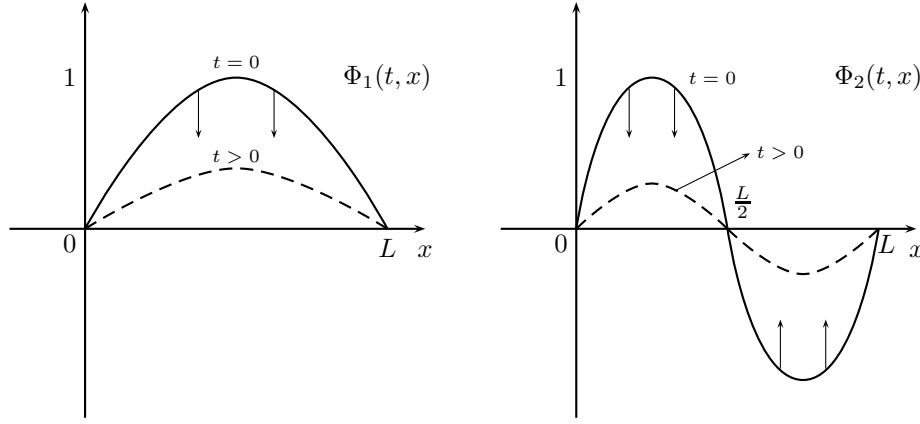


Figura 2.1: Dos soluciones fundamentales de la ecuación del calor

para algún par de constantes  $A \in \mathbb{R}$  y  $k_0 \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ . Dado que la  $k$ -ésima solución fundamental (2.10) satisface  $\Phi_k(0, x) = \sin(k\pi x/L)$ , entonces es directo ver que la solución de (2.1)-(2.3) correspondiente a (2.11) es

$$u(t, x) = A\Phi_{k_0}(t, x) = Ae^{-\alpha(k_0\pi/L)^2 t} \sin(k_0\pi x/L).$$

Más generalmente, si

$$f(x) = \sum_{i=1}^m A_i \sin(k_i\pi x/L)$$

para ciertas constantes  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$  y  $0 < k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$ , entonces la solución buscada es

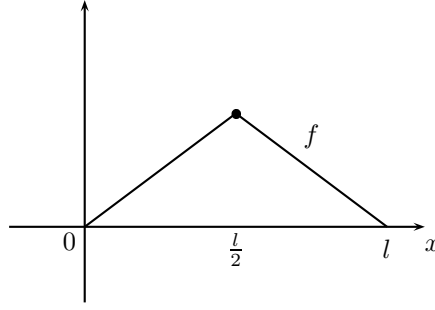
$$u(t, x) = \sum_{i=1}^m A_i \Phi_{k_i}(t, x) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t} \sin(k_i\pi x/L).$$

En efecto, de acuerdo al principio de superposición (ver sección 1.6), la linealidad de (2.1) implica que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución de (2.1). Además, como cada solución fundamental satisface la condición de borde (2.2), sus combinaciones lineales también la satisfacen:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \sum_{i=1}^m A_i \Phi_{k_i}(t, 0) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t} \sin(0) = 0, \\ u(t, L) &= \sum_{i=1}^m A_i \Phi_{k_i}(t, L) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t} \sin(k_i\pi) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, es directo verificar que  $u(0, x) = f(x)$ .

¿Que ocurre para una condición inicial correspondiente a una función  $f(x)$  más general? Por ejemplo, como proceder si  $f(x)$  no tiene descomposición como suma finita de senos y cosenos, como la función siguiente



La idea es escribir  $f(x)$  de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x/L) \quad (2.12)$$

y tomar como solución de nuestro problema a la función

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \sin(k\pi x/L)$$

Surgen varias preguntas

1. ¿Cuándo es posible descomponer una función  $f(x)$  como en (2.12)?
2. ¿Cómo se obtienen los coeficientes  $A_k$ ?
3. ¿Es válido el principio de superposición para combinaciones lineales infinitas?

El objetivo de la siguiente sección es mostrar que todas estas preguntas pueden responderse afirmativamente.

## 2.2. Series de Fourier

Sea  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua (basta continua por trozos). El método de separación de variables descrito en la sección anterior conduce de forma natural a la siguiente pregunta: ¿Podemos expresar  $f$  como una combinación lineal (eventualmente, como una serie infinita) de funciones sinusoidales? Diremos que  $f$  admite un desarrollo en *serie de Fourier* en  $[-\ell, \ell]$  si existen escalares  $a_0, a_1, \dots$  y  $b_1, b_2, \dots$  tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right], \quad \forall x \in [-\ell, \ell] \\ &= \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right], \quad \forall x \in [-\ell, \ell] \end{aligned}$$

Supongamos que esta igualdad es válida. ¿Cómo se obtienen los coeficientes en términos de  $f(x)$ ? Para responder a esto, veamos primero la serie de Fourier en forma compleja. Recordemos que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i} \end{aligned}$$

Luego si  $f(x)$  admite un desarrollo en serie de Fourier, entonces podemos reescribir este desarrollo como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{\frac{in\pi x}{\ell}} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{\frac{-in\pi x}{\ell}} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{-ik\pi x}{\ell}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $C_0 = \frac{a_0}{2}$  y

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{si } k \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

Para determinar los coeficientes complejos, fijamos  $k_0 \in \mathcal{N}$ , multiplicamos la ecuación (2.13) por  $e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}}$  e integramos en el intervalo  $[-\ell, \ell]$  para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}} dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\ell}^{\ell} e^{-\frac{ik\pi x}{\ell}} e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}} dx \\ &= 2\ell C_{k_0} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq k_0}}^{\infty} C_k \int_{-\ell}^{\ell} e^{-\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} dx \end{aligned}$$

pero notemos que para  $k \neq k_0$

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{-\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} dx = -\frac{\ell}{i(k-k_0)\pi} e^{-\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} \Big|_{-\ell}^{\ell} = 0,$$

donde hemos usado la  $2\pi i$ -periodicidad de la exponencial compleja, y por lo tanto

$$C_{k_0} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{-\frac{ik_0\pi \xi}{\ell}} d\xi$$

Ahora podemos regresar a los coeficientes reales. Primero, es claro que

$$a_0 = 2C_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx$$

Si  $n \geq 1$  entonces:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} a_n &= 2\Re(C_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \\ b_n &= -2\Im(C_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \end{aligned}$$

Observemos que de las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{in\pi x}{\ell}} e^{-\frac{im\pi x}{\ell}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2\ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

se deducen las correspondientes relaciones

$$\begin{aligned}\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx &= 0 \quad \forall n, m \in \mathcal{N}\end{aligned}$$

Recapitulando, si  $f$  es expresable en serie de Fourier entonces

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{ik\pi\xi/\ell} d\xi \right] e^{ik\pi x/\ell} \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\}\end{aligned}$$

Aunque supusimos que  $f$  es continua, en realidad basta que sea integrable para que los coeficientes de Fourier estén bien definidos. Dada una función  $f$  integrable en  $[-\ell, \ell]$ , definamos

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

donde los coeficientes se calculan como antes. En general, no se tiene que  $f(x) = S_f(x)$ ,  $\forall x \in [-\ell, \ell]$ . Desde ya para tener esta propiedad es necesario que  $f(\ell) = f(-\ell)$ , esto es la  $2\ell$ -periodicidad de  $f$ .

Sin embargo se pueden demostrar las siguientes propiedades:

Sea

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

la serie de Fourier truncada al orden  $N$  para  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Propiedad 1.** Si  $f$  es de cuadrado integrable ( $\int_{-\ell}^{\ell} f^2(t) dt < \infty$ ), y en particular si  $f$  es acotada, se tiene  $S_N \rightarrow f$  en media cuadrática:

$$\int_{-\ell}^{\ell} [f(t) - S_N(t)]^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

**Propiedad 2.** Si  $f$  es derivable en  $[-\ell, \ell]$ , es decir continua en  $[-\ell, \ell]$ , derivable en  $] -\ell, \ell[$ , derivable a la derecha en  $-\ell$  y a la izquierda en  $\ell$ , entonces  $S_N$  converge puntualmente hacia  $f$ , salvo en los extremos  $\pm\ell$  cuando  $f(\ell) \neq f(-\ell)$ , es decir

$$\begin{aligned}f(x) &= S_f(x) \quad \forall x \in ] -\ell, \ell[ \\ S_f(\ell) &= S_f(-\ell) = \frac{1}{2}[f(\ell) + f(-\ell)].\end{aligned}$$

**Propiedad 3.** Si  $f$  es derivable en  $[-\ell, \ell]$  y  $f(\ell) = f(-\ell)$  entonces  $f = S_f$  en  $[-\ell, \ell]$ . Si además  $f'$  es de cuadrado integrable la convergencia de  $S_N$  hacia  $f$  es uniforme.

**Corolario.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $2\ell$ -periódica de clase  $\mathcal{C}^1$  entonces  $f = S_f$  en  $\mathbb{R}$  y  $S_N$  converge uniformemente hacia  $f$ .

**Observación 2.2.1.** Dadas dos funciones  $f, g : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{C}$  definimos

$$\langle f, g \rangle_{\ell^2} \equiv \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Notemos, que dada la definición anterior, se cumple que

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_{\ell^2} &= \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

De esta forma tiene sentido definir

$$\begin{aligned} \|f\|_{\ell^2} &\equiv \sqrt{\langle f, f \rangle_{\ell^2}} \\ &= \left( \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En el caso de la exponencial compleja de la serie de Fourier

$$\begin{aligned} \|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2} &= \left( \int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} e^{-\frac{ik\pi x}{\ell}} dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2\ell} \end{aligned}$$

Luego, los coeficientes de Fourier (en su forma compleja) vienen dados por

$$C_k = \frac{1}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2}} \left\langle f, e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} \right\rangle_{\ell^2}$$

y por lo tanto, la descomposición de  $f$  viene dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle f, e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} \right\rangle_{\ell^2}}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2}} \cdot \frac{e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2}}$$

Además, se tiene que para  $k \neq j$

$$\begin{aligned} \left\langle e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}, e^{\frac{ij\pi x}{\ell}} \right\rangle_{\ell^2} &= \int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} e^{-\frac{ij\pi x}{\ell}} dx \\ &= \int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{i(k-j)\pi x}{\ell}} dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene gracias a la periodicidad de la función exponencial compleja.

Notemos la analogía con  $\mathbb{R}^n$  al momento de descomponer un vector  $\vec{x}$  en una base ortogonal  $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \vec{x}, e_k \rangle}{\|e_k\|} \frac{e_k}{\|e_k\|}$$

donde la base cumple

$$\langle e_k, e_j \rangle = 0, \quad \forall k \neq j.$$

Así, la serie de Fourier de  $f$ , en forma compleja, se puede interpretar como una descomposición en una base ortogonal de la función exponencial.

### Observación importante

Si  $g : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función impar, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx &= \int_{-\ell}^0 g(x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx = - \int_{-\ell}^0 g(-x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx \\ &= \int_0^{\ell} g(-x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx = \int_0^{\ell} [g(-x) + g(x)] dx = 0 \end{aligned}$$

luego:

- (1) Si  $f$  es par entonces  $f(t) \sin(\frac{n\pi t}{\ell})$  es impar de donde  $b_n = 0, \forall n \geq 1$ .

$$\text{Luego } S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

- (2) Si  $f$  es impar entonces  $f(t) \cos(\frac{n\pi t}{\ell})$  es impar de donde  $a_n = 0, \forall n \geq 1$ .

$$\text{Luego } S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

En el primer caso  $f$  admite un desarrollo en términos de sólo cosenos, mientras que en el segundo aparecen sólo senos.

**Ejemplo.** Desarrollo en serie de Fourier de  $f(x) = x$  en  $[-\pi, \pi]$ . Como  $f$  es impar  $a_n = 0 \forall n \in \mathcal{N}$ , de donde  $S_f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$  y los coeficientes  $b_n$  vienen dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} - \frac{x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \frac{\cos nx}{n} dx = -\frac{2}{n} (-1)^n \\ b_1 &= 2, b_2 = -\frac{2}{2}, b_3 = \frac{2}{3}, b_4 = -\frac{2}{4}, \dots \end{aligned}$$

Es decir

$$S_f(x) = 2[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots]$$

En particular, se deduce

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right],$$

lo que se puede escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Ejemplo.** Serie de Fourier de  $f(x) = x^2$  en  $[-1, 1]$



Como  $f$  es par entonces  $\int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = 0$ , lo que implica que  $b_n = 0$ .

Luego  $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$  donde

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 x^2 \cos(n\pi x) dx \\ &= x^2 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 - \frac{2}{n\pi} \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left[ -\frac{x \cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \right] \end{aligned}$$

es decir

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2} [\cos n\pi + \cos(-n\pi)] = \frac{4}{(n\pi)^2} (-1)^n.$$

En consecuencia

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[ -\cos(\pi x) + \frac{1}{4} \cos(2\pi x) - \frac{1}{9} \cos(3\pi x) + \frac{1}{16} \cos(4\pi x) - \frac{1}{25} \cos(5\pi x) + \dots \right].$$

Un corolario interesante de la fórmula anterior es

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \right]$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 2.3. Aplicación a la resolución de EDPs

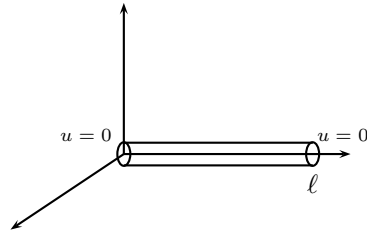
El método de separación de variables consiste en encontrar la solución  $u$  de una EDP como superposición de soluciones elementales  $U_k$  de la ecuación, es decir  $u = \sum \alpha_k U_k$ . Los coeficientes  $\alpha_k$  se ajustan de manera que  $u$  satisfaga las condiciones de borde y/o iniciales.

### 2.3.1. Ecuación del calor en una barra finita: condiciones de borde de tipo Dirichlet

Retomemos la ecuación del calor para el caso de una barra finita:

$$\begin{array}{lll} (EC) & u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, 0 \leq x \leq \ell \\ (CB) & u(0, x) = f(x) & 0 \leq x \leq \ell \\ (CI) & u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 & t > 0 \end{array}$$

donde  $\alpha > 0$ .



Proponemos buscar soluciones elementales en variables separadas:  $U(t, x) = T(t)X(x)$

$$(EC) \quad T'(t)X(x) = \alpha T(t)X''(x) \Rightarrow \underbrace{\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{indep. de } x} = \alpha \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{indep. de } t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \text{ cte} \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda/\alpha \text{ cte} \end{cases}$$

Se obtienen de este modo las siguientes E.D.O's:

$$\begin{cases} T(t) = ae^{\lambda t} \\ X(x) = be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x} + ce^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} \end{cases}$$

Luego

$$U(t, x) = a \cdot e^{\lambda t} [be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x} + ce^{\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$$

Notemos que la constante  $a$  puede ser absorbida en  $\alpha_k$ ; es por eso que la podemos suprimir de la familia de soluciones  $U(t, x)$ . Examinemos ahora la condición de borde en  $x = 0$

$$(CB) \quad u(t, 0) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evalutando, se obtiene  $b + c = 0$  equivalentemente  $c = -b$ . Luego

$$U(t, x) = b \cdot [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}] e^{\lambda t}$$

Análogamente a lo anterior, hemos absorbido en  $\alpha_k$  la constante  $b$ .

Incorporemos al análisis la otra condición de borde (en  $x = \ell$ )

$$(CB) \quad u(t, \ell) = 0 \quad \forall t$$

Evalutando, se obtiene  $e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} = e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}$ , es decir

$$e^{2\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} = 1$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda/\alpha}\ell &= 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\lambda}{\alpha} &= -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \\ \lambda &= -\alpha\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$U(t, x) = [e^{\frac{k\pi i}{\ell}x} - e^{-\frac{k\pi i}{\ell}x}]e^{-\alpha(\frac{k\pi i}{\ell}x)^2t} = 2i \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi x}{\ell})^2t}$$

Donde la constante  $2i$  es absorbida en  $\alpha_k$ .

De esta forma, se obtiene que para cada  $k \in \mathcal{Z}$  se tiene la solución elemental

$$U_k(t, x) = \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{\ell} \right) e^{-\alpha(\frac{k\pi x}{\ell})^2t}$$

**Nota:** Como  $U_{-k}(t, x) = -U_k(t, x)$  basta considerar el conjunto de soluciones elementales tales  $U_k(t, x); k = 1, 2, 3, \dots (k \in \mathcal{N})$

Cada función  $U_k$  satisface (EC) y (CB), de modo que  $\sum \alpha_k U_k(t, x)$  también. Solo nos queda ajustar las constantes  $\alpha_k$  de manera de satisfacer (CI). Postulamos

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi x}{\ell})^2t}$$

Para  $t = 0$  se debe tener

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

por lo cual  $\alpha_k$  corresponde al coeficiente de Fourier de la extensión impar  $\tilde{f} : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & x \in [0, \ell] \\ -f(x) & x \in [-\ell, 0] \end{cases} \\ \alpha_k &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} dx \end{aligned}$$

En conclusión

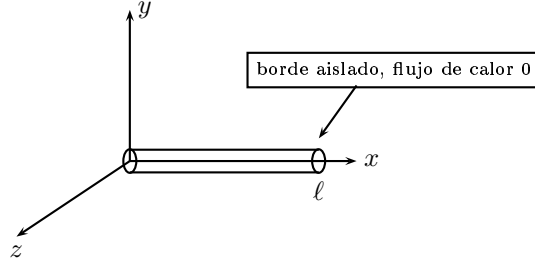
$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi x}{\ell})^2t}$$

Notemos que  $u(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y que las frecuencias más altas decaen más rápidamente.

### 2.3.2. Ecuación del calor en una barra finita. Condiciones de borde de tipo Neumann

Analicemos el ejemplo anterior con condición de borde tipo Neumann:

$$\begin{aligned} (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} & t > 0, 0 < x < \ell \\ (CB) \quad u_x(t, 0) &= u_x(t, \ell) = 0 & t > 0 \\ (CI) \quad u(0, x) &= f(x) & 0 < x < \ell \end{aligned}$$



**Soluciones elementales:** Se obtienen de la misma forma que en el caso anterior

$$U(t, x) = T(t)X(x) = \dots = e^{\lambda t} \left[ a e^{\sqrt{\lambda/\alpha} x} + b e^{-\sqrt{\lambda/\alpha} x} \right]$$

$$(CB) \quad u_x(t, 0) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evalutando en  $x = 0$  se obtiene  $a\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} - b\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = 0$ , lo que equivale a  $\lambda = 0$  o bien  $a = b$ . En el primer caso  $U_o = cte = 1$ , y en el segundo se tiene:

$$U(x, t) = a \cdot e^{\lambda t} \left[ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x} + e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x} \right]$$

Como se ha hecho en casos anteriores absorbemos  $a$  en  $\alpha_k$ . Veamos ahora qué pasa con la condición en  $x = \ell$

$$(CB) \quad U_x(t, \ell) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evalutando en  $x = \ell$  se obtiene

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \left[ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \ell} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \ell} \right] = 0$$

de donde  $\lambda = 0$  (ya visto) o bien  $e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \ell} = e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \ell}$ . Desarrollando esto último llegamos a

$$\lambda = -\alpha \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Encontramos así, dado  $k \in \mathbb{Z}$ , la solución elemental asociada a ese  $k$  que se escribe

$$U_k(t, x) = \left[ e^{\frac{k\pi i}{\ell} x} + e^{-\frac{k\pi i}{\ell} x} \right] e^{-\alpha \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t} = \cos \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t},$$

donde el factor 2 producido por el coseno es absorbido en forma clásica.

Aplicando el principio de superposición podemos concluir que

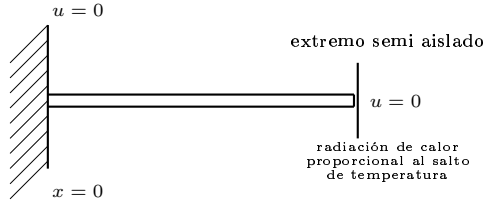
$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] \cos \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t}$$

Para esto último hubo que extender  $f$  de forma par sobre  $[-\ell, \ell]$ .

### 2.3.3. Ecuación del calor en barra finita. Condiciones mixtas

Veamos la ecuación del calor en el caso con condiciones mixtas, es decir Dirichlet en un extremo y Neumann en el otro:

$$\begin{aligned}
 (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \quad t > 0, 0 < x < \ell \\
 (CI) \quad u(0, x) &= f(x) \quad 0 < x < \ell \\
 (CB) \quad u(t, 0) &= 0 \quad t > 0 \quad \text{temperatura fija} \\
 u_x(t, \ell) &= -\beta u(t, \ell) \quad t > 0 \quad \text{extremo semi-aislado}
 \end{aligned}$$



Como antes se obtiene  $U(t, x) = e^{\lambda t} [ae^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} + be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$  y la (CB)  $u(t, 0) = 0 \quad t > 0$  implica  $a + b = 0$  de modo que nos reducimos a

$$U(t, x) = e^{\lambda t} [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$$

La (CB) en el extremo semi-abierto se escribe

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} + e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}] = -\beta [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}]$$

Supongamos que  $\lambda < 0$  (ya que es el único caso interesante de analizar, pues los otros casos entregan soluciones triviales) y definamos  $i\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$ . Tras el desarrollo correspondiente de las exponenciales se llega a

$$2i\mu \cos \mu\ell = -\beta i \sin \mu\ell$$

o equivalentemente, tomando  $y = \mu\ell$ .

$$\frac{y}{\ell} \cos y = -\beta \sin y$$

o bien

$$-\frac{y}{\ell\beta} = \tan y$$

Esta ecuación trascendente entrega una familia de soluciones numerables, digamos  $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$  la cual se puede encontrar mediante métodos numéricos. Estas se pueden representar como las intersecciones de los gráficos de las funciones  $-\frac{y}{\ell\beta}$  con  $\tan y$  (lo que se puede apreciar en el siguiente gráfico).

#### GRAFICO

Como  $y_k \neq k\pi$ , los coeficientes  $\alpha_k$  no corresponden a los coeficientes de Fourier clásicos, pero para encontrarlos se razona de manera análoga. En efecto

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t, x) \quad \forall t > 0, 0 < x < \ell$$

en particular

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(0, x)$$

con

$$U_k(t, x) = e^{y_k^2/\ell^2 \alpha t} \left[ e^{y_k/\ell x} - e^{-y_k/\ell x} \right]$$

Así

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left[ e^{y_k/\ell x} - e^{-y_k/\ell x} \right]$$

Como  $\frac{y_k}{\ell} = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha}}$  se tiene  $y_k \in \mathcal{C}$ , y el problema se reduce a encontrar los coeficientes  $\alpha_k$  de modo que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell}$$

Ahora, multiplicando por  $\operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell}$  e integrando sobre  $[0, \ell]$  (donde supondremos que el intercambio de la sumatoria con la integral es válido) se obtiene

$$\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\ell} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx$$

Ahora notemos que

$$\int_0^{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx \equiv 0 \quad \forall k \neq j$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx &= \alpha_j \int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2 \frac{y_j x}{\ell} dx \\ \alpha_j &= \frac{\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx}{\int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2 \frac{y_j x}{\ell} dx} \end{aligned}$$

### **Demostración.**

Sea  $k \neq j$ ; entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx &= \left. \frac{\operatorname{sen}(y_k - y_j) \frac{x}{\ell}}{2(y_k - y_j)/\ell} - \frac{\operatorname{sen}(y_k + y_j) \frac{x}{\ell}}{2(y_k + y_j)/\ell} \right|_0^{\ell} \\ &= \frac{\ell}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(y_k - y_j)}{y_k - y_j} - \frac{\operatorname{sen}(y_k + y_j)}{y_k + y_j} \right] \\ &= \frac{\ell}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen} y_k \cos y_j - \cos y_k \operatorname{sen} y_j}{y_k - y_j} - \frac{\operatorname{sen} y_k \cos y_j + \cos y_k \operatorname{sen} y_j}{y_k + y_j} \right] \\ &= \frac{1}{2\beta} \left[ \frac{y_k \cos y_k \cos y_j - y_j \cos y_k \cos y_j}{y_k - y_j} - \frac{y_k \cos y_k \cos y_j + y_j \cos y_k \cos y_j}{y_k + y_j} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

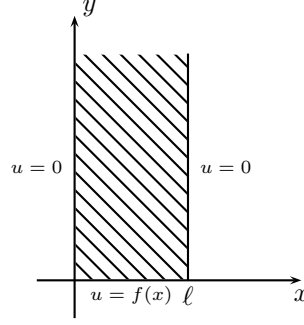


Figura 2.2: Dominio semi-infinito para la ecuación de Laplace

### 2.3.4. Ecuación de Laplace en banda semi-infinita.

En esta sección consideramos la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} (EC) \quad 0 &= u_{xx} + u_{yy} \quad y > 0, \quad 0 < x < \ell \\ (CB) \quad u(0, y) &= u(\ell, y) = 0 \quad y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \quad 0 < x < \ell \\ u(x, \infty) &= 0 \quad 0 < x < \ell \end{aligned}$$

en una región como se muestra a continuación **Soluciones elementales:** Las suponemos en variables separadas

$$U(x, y) = X(x)Y(y)$$

Se tiene  $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ . Dividiendo por  $XY$  se obtiene

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = cte.$$

Esto nos conduce a dos E.D.O's, una para  $X$  y otra para  $Y$  que resolvemos para llegar a

$$\begin{cases} X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ Y(y) = ce^{\sqrt{-\lambda}y} + de^{-\sqrt{-\lambda}y} \end{cases}$$

Utilizando la condición de borde

$$U(0, y) = 0 \quad \forall y$$

obtenemos  $a + b = 0$ , de donde

$$X(x) = e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Por otro lado

$$U(\ell, y) = 0 \quad \forall y$$

Evaluando se tiene  $e^{\sqrt{\lambda}\ell} = e^{-\sqrt{\lambda}\ell}$  que resulta equivalente a  $e^{2\sqrt{\lambda}\ell} = 1$ . De esto último se desprende que

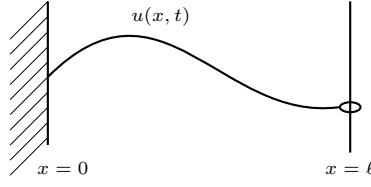
$$2\sqrt{\lambda}\ell = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$$

Así

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$$

Podemos entonces reescribir las expresiones de  $X(x)$  y de  $Y(y)$ , módulo una constante

$$\begin{cases} X(x) = \sin \frac{k\pi x}{\ell} \\ Y(y) = c \cdot e^{\frac{k\pi}{\ell}y} + d \cdot e^{-\frac{k\pi}{\ell}y} \end{cases}$$

Figura 2.3: Cuerda de largo  $\ell$  con un extremo fijo y el otro libre

De la condición

$$U(x, \infty) = 0$$

se desprende que  $c = 0$ , pues de otro modo la solución diverge, cosa que no es aceptable desde el punto de vista de la física. Tenemos que  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$U_k(x, y) = e^{-\frac{k\pi y}{\ell}} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

Luego, en virtud del principio de superposición, la solución tiene la forma

$$u(x, y) = \sum \alpha_k e^{-\frac{k\pi y}{\ell}} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

Ahora bien  $u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$ , lo que nos permite expresar los coeficientes  $\alpha_k$  como

$$\alpha_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi$$

Finalmente, obtenemos una fórmula explícita para la solución

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] e^{-k\pi y/\ell} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

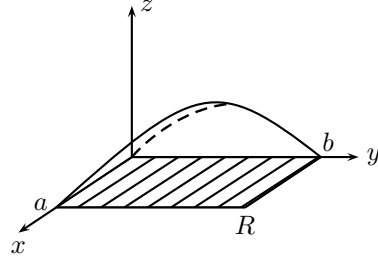
**Ejercicio.** Resolver la ecuación de ondas de una cuerda de largo  $\ell$  con un extremo fijo y el otro libre.

### 2.3.5. Oscilaciones en una membrana rectangular

Consideremos una membrana rectangular. Como se vio en la sección 1.3.1 la ecuación que modela esta situación es

$$\begin{array}{lll} (EO) & u_{tt} = \gamma^2(u_{xx} + u_{yy}) & \text{en } R \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (CB) & u = 0 & \text{sobre } \partial R \\ (CI) & u(0, x, y) = f(x, y) & \text{en } R \\ & u_t(0, x, y) = g(x, y) & \text{en } R \end{array}$$





donde la región viene dada por  $R = [0, a] \times [0, b]$ .

Como antes, separamos variables:  $U(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$ . Reemplazando, llegamos a

$$T''XY = \gamma^2[TX''Y + TXY''].$$

Dividiendo por  $XYT$  se obtiene

$$\frac{T''}{T} = \gamma^2 \left[ \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right] \quad 0 < x < a, 0 < y < b, t \in \mathbb{R}_+$$

Como la igualdad anterior es cierta para cualquier valor que tomen las variables  $x, y$  y  $t$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{T''}{T} &= K_0 \\ \frac{X''}{X} &= K_1 \\ \frac{Y''}{Y} &= K_2 \end{aligned}$$

donde  $K_0, K_1$  y  $K_2$ , constantes, para las cuales además se satisface la relación  $K_0 = \gamma^2(K_1 + K_2)$ .

Escribimos las soluciones de las E.D.O's correspondientes

$$\begin{aligned} T(t) &= a_0 e^{\sqrt{K_0}t} + b_0 e^{-\sqrt{K_0}t} \\ X(x) &= a_1 e^{\sqrt{K_1}x} + b_1 e^{-\sqrt{K_1}x} \\ Y(y) &= a_2 e^{\sqrt{K_2}y} + b_2 e^{-\sqrt{K_2}y} \end{aligned}$$

Impongamos las condiciones de borde

$$u(t, 0, y) = 0 \quad \forall t > 0, \forall y \in [0, b]$$

Evaluando obtenemos  $a_1 + b_1 = 0$ . Por otra parte

$$u(t, a, y) = 0 \quad \forall t > 0, \forall y \in [0, b]$$

Luego, podemos escribir  $e^{\sqrt{K_1}a} = e^{-\sqrt{K_1}a}$ , que equivale a

$$2\sqrt{K_1}a = 2k_1\pi i, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

Desarrollando ésto último obtenemos

$$K_1 = -\left(\frac{k_1\pi}{a}\right)^2$$

Llegamos a una expresión para  $X$

$$X(x) = \text{sen} \left( \frac{k_1 \pi}{a} x \right) \quad k_1 \in \mathcal{Z}$$

Análogamente, utilizando las condiciones

$$\begin{aligned} CB : u(t, x, 0) &= 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in [0, a] \\ u(t, x, b) &= 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in [0, a] \end{aligned}$$

obtenemos una expresión para  $Y$

$$Y(y) = \text{sen} \left( \frac{k_2 \pi}{b} y \right) \quad k_2 \in \mathcal{Z}$$

Se tiene además

$$K_0 = \gamma^2(K_1 + K_2) = -\gamma^2 \pi^2 \left[ \left( \frac{k_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{k_2}{b} \right)^2 \right]$$

Podemos con esto escribir una solución elemental. En este caso queda parametrizada por  $k_1$  y  $k_2$ .

$$U_{k_1, k_2} = \text{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \text{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} [\alpha_{k_1 k_2} \text{sen} w_{k_1 k_2} t + \beta_{k_1 k_2} \cos w_{k_1 k_2} t]$$

donde

$$w_{k_1 k_2} = \gamma \pi \sqrt{\left( \frac{k_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{k_2}{b} \right)^2}$$

Aplicando el principio de superposición, escribimos la solución general

$$u(t, x, y) = \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \text{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} [\alpha_{k_1 k_2} \text{sen} w_{k_1 k_2} t + \beta_{k_1 k_2} \cos w_{k_1 k_2} t]$$

Los coeficientes  $\alpha_{k_1 k_2}$  y  $\beta_{k_1 k_2}$  se ajustan de modo de reproducir las condiciones iniciales (CI):

$$u(0, x, y) = \sum_{k_1 k_2} \beta_{k_1 k_2} \text{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \text{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} = f(x, y)$$

De este modo

$$\beta_{k_1 k_2} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \text{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \text{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} dy dx$$

Para la otra condición

$$u_t(0, x, y) = \sum_{k_1 k_2} \alpha_{k_1 k_2} w_{k_1 k_2} \text{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \text{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} = g(x, y)$$

Y el coeficiente  $\alpha_{k_1 k_2}$  queda entonces determinado por

$$\alpha_{k_1 k_2} = \frac{4}{ab w_{k_1 k_2}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \text{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \text{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} dy dx$$

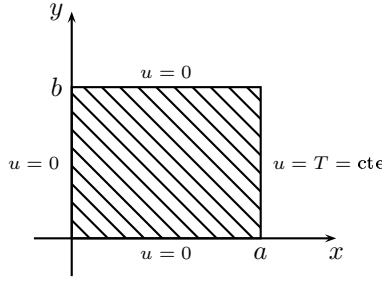


Figura 2.4: Dominio rectangular para la ecuación de Laplace

### 2.3.6. Ecuación de Laplace en un rectángulo

Analicemos ahora el caso de una membrana rectangular en régimen estacionario, es decir

$$\begin{aligned} (L) \quad u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad 0 < x < a, 0 < y < b \\ (CB) \quad u(x, 0) &= u(x, b) = 0 \quad 0 < x < a \\ u(0, y) &= 0 \quad 0 < y < b \\ u(a, y) &= T \quad 0 < y < b, \end{aligned}$$

donde  $T$  es una constante.

Separando variables se obtiene  $\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda = \text{cte}$ . Esto conduce a dos EDO's cuyas soluciones son

$$\begin{cases} Y = ae^{\sqrt{\lambda}y} + be^{-\sqrt{\lambda}y} \\ X = ce^{\sqrt{-\lambda}x} + de^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{cases}$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes a determinar. Imponemos la condición de borde  $u(x, 0) = 0$ , la cual nos entrega  $a + b = 0$ . Luego

$$Y(y) = a \left( e^{\sqrt{\lambda}y} - e^{-\sqrt{\lambda}y} \right)$$

Utilizando ahora  $u(0, y) = 0$ , se obtiene  $c + d = 0$ , con lo que se concluye que

$$X(x) = c \left( e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x} \right)$$

Ocupando  $u(x, b) = 0$ , se tiene que  $e^{2\sqrt{\lambda}b} = 1$ , lo que nos lleva a una ecuación para  $\lambda$

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}b &= 2k\pi i \\ \lambda &= -\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \end{aligned}$$

Así, se encuentra que

$$Y(y) = 2ai \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

y

$$X(x) = 2c \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b}$$

Luego, escribimos la solución elemental

$$U_k(x, y) = \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

Aplicando el principio de superposición

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sinh \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{k\pi y}{b}$$

Luego, para calcular las constantes  $\alpha_k$  definimos  $\overline{T}$  mediante

$$\overline{T}(y) = \begin{cases} T & 0 < y < b \\ -T & -b < y < 0, \end{cases}$$

es decir,  $\overline{T}$  es la extensión impar de la función que vale la constante  $T$  sobre el intervalo  $(0, b)$ . Notar que el valor de  $\overline{T}$  en 0 no es relevante.

Gracias a la condición de borde

$$u(a, y) = T = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sinh \frac{k\pi a}{b} \sin \frac{k\pi y}{b},$$

el coeficiente de Fourier  $\alpha_k$ , viene dado por

$$\alpha_k \sinh \frac{k\pi a}{b} = \frac{2T}{b} \int_0^b \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{2T}{k\pi} [1 - (-1)^k]$$

Finalmente obtenemos

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4T}{(2k-1)\pi \sinh[(2k-1)\pi a/b]} \sinh \left( (k-1) \frac{\pi x}{b} \right) \sin \left( (2k-1) \frac{\pi y}{b} \right).$$

### 2.3.7. Ecuación de ondas. Cuerda finita.

Las oscilaciones de una cuerda elástica vienen descritas por la ecuación

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} &= 0 & 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \ell) &= 0 & t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) & 0 < x < \ell \\ u_t(0, x) &= g(x) & 0 < x < \ell \end{aligned} \tag{EO}$$

Separamos variables:  $U(t, x) = T(t)X(x)$ . Al reemplazar esto en la ecuación se obtiene  $T''X = \alpha^2 TX''$ , es decir

$$\frac{T''}{T} = \alpha^2 \frac{X''}{X} = cte = \lambda$$

De este modo, una vez más aparecen dos E.D.O's

$$\begin{cases} T'' = \lambda T \\ X'' = \frac{\lambda}{\alpha^2} X \end{cases}$$

cuyas respectivas soluciones son

$$\begin{cases} T(t) = ae^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t} \\ X(x) = ce^{\sqrt{\lambda}x/\alpha} + de^{-\sqrt{\lambda}x/\alpha} \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de borde

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow c + d = 0. \\ u(t, \ell) &= 0 \Rightarrow X(\ell) = 0 \Rightarrow e^{\sqrt{\lambda}\ell/\alpha} - e^{-\lambda\ell/\alpha} = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}\ell/\alpha} = 1 \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda}\ell/\alpha &= 2k\pi i \quad k \in \mathcal{Z} \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{\alpha k \pi i}{\ell} \quad k \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

Escribimos la solución elemental

$$U_k(t, \alpha) = \left[ a e^{\frac{\alpha k \pi t i}{\ell}} + b e^{-\frac{\alpha k \pi t i}{\ell}} \right] \cdot c \cdot \underbrace{\left[ e^{\frac{\alpha k \pi x i}{\ell}} - e^{-\frac{\alpha k \pi x i}{\ell}} \right]}_{2i \operatorname{sen}\left(\frac{k \pi x}{\ell}\right)}$$

Reemplazando y absorbiendo constantes, llegamos a

$$U_k(t, \alpha) = \left[ \tilde{a} \cos \frac{\alpha k \pi t}{\ell} + \tilde{b} \operatorname{sen} \frac{\alpha k \pi t}{\ell} \right] \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}, \quad k \in \mathcal{N}$$

Por el principio de superposición

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{\alpha k \pi t}{\ell} + b_k \operatorname{sen} \frac{\alpha k \pi t}{\ell} \right] \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}$$

es solución de la ecuación.

Tenemos dos familias de constantes que determinar:  $a_k$  y  $b_k$ . Para las primeras utilizamos la condición inicial sobre  $u$

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}$$

y obtenemos

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell} dx$$

que corresponde al coeficiente de Fourier de la extensión impar de  $f(x)$ .

Para encontrar  $b_k$  debemos imponemos la condición sobre  $u_t$ :

$$u_t(0, x) = g(x)$$

lo que equivale a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( b_k \frac{\alpha k \pi}{\ell} \right) \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}.$$

De esta relación observamos que  $(b_k \frac{\alpha k \pi}{\ell})$  debe ser el coeficiente de Fourier de la extensión impar de  $g$ , y deducimos que

$$b_k = \frac{2}{\alpha k \pi} \int_0^{\ell} g(x) \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell} dx.$$



## Capítulo 3

# La transformada de Fourier

### 3.1. Definición y el teorema de inversión

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Es posible demostrar que en este caso, dado  $\ell > 0$ , se tiene que para todo  $x \in [-\ell, \ell]$

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N C_k e^{i \frac{k\pi x}{\ell}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i \frac{k\pi x}{\ell}}$$

donde

$$C_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{-i \frac{k\pi \xi}{\ell}} d\xi, \quad C_k \in \mathcal{C}.$$

¿Qué ocurre cuando  $\ell \rightarrow +\infty$ ?

Reescribamos lo anterior de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) e^{i(x-y) \frac{k\pi}{\ell}} dy \quad \forall x \in [-\ell, \ell].$$

Definimos

$$g_{x,\ell}(s) = \int_{-\ell}^{\ell} f(y) e^{i(x-y)s} dy.$$

De esta forma,  $f$  se escribe

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{x,\ell}\left(\frac{k\pi}{\ell}\right) \frac{\pi}{\ell} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{x,\ell}\left(\frac{k\pi}{\ell}\right) \left[(k+1) \frac{\pi}{\ell} - k \frac{\pi}{\ell}\right]. \end{aligned}$$

Esta última expresión puede verse como la suma de Riemann de la función  $g_{x,\ell}$  sobre  $(-\infty, \infty)$  con un paso  $\Delta = \frac{\pi}{\ell}$ . Es claro que si  $\ell \rightarrow \infty$  entonces el paso de la partición  $\Delta = \frac{\pi}{\ell}$  tiende a cero y que

$$g_{x,\ell}(s) \rightarrow g_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i(x-y)s} dy.$$

Bajo ciertas condiciones se puede argumentar entonces que las sumas de Riemann de  $g_{x,\ell}$  convergen a la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds$ . De este modo deducimos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_x(s) ds \quad \text{donde} \quad g_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i(x-y)s} dy \quad (3.1)$$

**Observación 3.1.1.** Lo anterior no se hizo rigurosamente pues las sumas de Riemann corresponden a funciones que dependen de  $l$  y **no a una función fija**, sin embargo, dado que  $g_{x,l} \rightarrow g_x$  cuando  $l \rightarrow \infty$ , este “paso al límite” sí se puede justificar de manera rigurosa.

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i(x-y)s} dy \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iys} dy \right] ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iys} dy \right] ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Definición 3.1.2.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable (i.e.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy < \infty$ ).

Se define la Transformada de Fourier de la función  $f$  como

$$\begin{aligned} \hat{f}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iys} dy \end{aligned} \quad (3.3)$$

**Notación.**  $Tf(s), \hat{f}(s), \mathcal{F}f(s)$

Motivados por la fórmula (3.2) definimos lo que denominamos la antitransformada de una función  $g$  como sigue

**Definición 3.1.3.** Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable

Se define así la Antitransformada de Fourier de  $g$  como

$$\begin{aligned} \check{g}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{ixs} ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Notación.**  $T^{-1}g(x), \check{g}(x), \mathcal{F}^{-1}g(x)$

**Teorema 3.1.4 (de inversión).** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable (y por lo tanto posee transformada de Fourier) y supongamos además que  $Tf = \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es integrable. Entonces se tiene que si  $f$  es continua:

$$f(x) = T^{-1}(Tf)(x) = \check{\hat{f}}(x)$$

es decir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iys} dy \right] ds \quad (3.5)$$

**Corolario 3.1.5.** Si  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  son continuas e integrables, y  $\hat{f} = \hat{g}$ , entonces  $f = g$ .

**Observación.**  $T$  y  $T^{-1}$  son lineales. Esto se desprende directamente de la linealidad de la integral.

## 3.2. Propiedades fundamentales

### 3.2.1. La transformada de una derivada

**Proposición 3.2.1.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable con derivada  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  también integrable (o sea  $f$  y  $f'$  poseen transformada de Fourier). Entonces

$$\hat{f}'(s) = is\hat{f}(s) \quad (3.6)$$



**Proposición 3.2.2.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable,  $k$  veces derivable, tal que  $f^{(k)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  también es integrable, es decir  $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$  poseen transformada de Fourier. Entonces

$$\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

**Ejemplo 3.2.3 (Resolución de una EDO).** Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$3y'' + 2y' + y = f(x), \quad (3.7)$$

donde  $f(x)$  es una función conocida.

Aplicamos transformada de Fourier

$$\begin{aligned} 3\widehat{y''} + 2\widehat{y'} + \widehat{y} &= \hat{f}(s) \\ (-3s^2 + 2is + 1)\hat{y}(s) &= \hat{f}(s) \end{aligned}$$

y concluimos que

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1}.$$

Aplicando antitransformada

$$\begin{aligned} y(x) &= T^{-1}(\hat{y}(s)) \\ &= T^{-1}\left(\frac{\hat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{\hat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1} ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para una función  $f = f(x)$  particular se hace el cálculo explícito de esta integral cuando sea posible.

**Observación 3.2.4.** Notar que de la teoría de EDOs lineales sabemos que el espacio de las soluciones de (3.7) es de dimensión 2. En otras palabras, en la solución (3.8) faltan dos constantes libres. ¿Puede explicar esto?

### 3.2.2. El teorema de convolución

**Definición 3.2.5.** Dadas  $f, g$  integrables, definimos el producto de convolución de  $f$  y  $g$  mediante

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy$$

**Teorema 3.2.6 (de convolución).** Sean  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones integrables. Entonces se cumple que

$$\widehat{f * g}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)\sqrt{2\pi} \quad (3.9)$$

o bien en forma inversa

$$T^{-1}(\hat{f}(s)\hat{g}(s))(x) = (f * g)(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.10)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} (f * g)(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-\xi)g(\xi) d\xi dy \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\xi} g(\xi) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(y-\xi)} f(y-\xi) dy}_{\sqrt{2\pi}\hat{f}(s)} d\xi \\ &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)\end{aligned}$$

■

### 3.2.3. Propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

- Crecimiento en espacio

$$\widehat{f(x - x_0)}(s) = e^{isx_0} \hat{f}(s)$$

- Crecimiento en frecuencia

$$\widehat{e^{is_0 x} f(x)}(s) = \hat{f}(s - s_0)$$

- Modulación

$$\begin{aligned}\widehat{f(x) \cos(w_0 x)}(s) &= \frac{1}{2} [\hat{f}(s - w_0) + \hat{f}(s + w_0)] \\ \widehat{f(x) \sin(w_0 x)}(s) &= \frac{1}{2i} [\hat{f}(s + w_0) - \hat{f}(s - w_0)]\end{aligned}$$

- Cambio de escala

$$\widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a \neq 0$$

- Inversión del espacio (o del tiempo)

$$\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$$

- Convolución

$$\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$$

- Derivación

$$\widehat{f'(x)}(s) = is \hat{f}(s)$$

de esto último se deduce que

$$\widehat{f^{(k)}(x)}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

## 3.3. Ejemplos de transformadas de Fourier

**Ejemplo 3.3.1.** Calcular la transformada de Fourier de

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Tenemos que  $f(x)$  es integrable más aún  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{\pi}$  y es una función positiva. Por definición

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-isx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2 - \frac{s^2}{4}} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx.\end{aligned}$$

Llamemos  $I$  a la integral  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx$ . Para calcularla consideremos el siguiente camino (ver figura 3.1) y la función definida en el plano complejo  $f(z) = e^{-z^2}$  la cual es holomorfa por ser composición de funciones holomorfas. Entonces

$$0 = \oint_{C_R} e^{-z^2} dz = \sum_{j=1}^4 \int_{C_R^j} e^{-z^2} dz.$$

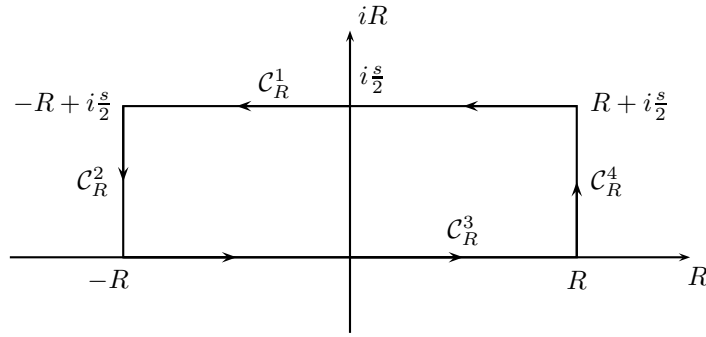


Figura 3.1: Camino de integración para calcular  $\widehat{e^{-x^2}}$

Para cada uno de los segmentos de este camino tenemos:

1.

$$\begin{aligned}\int_{C_R^1} e^{-z^2} dz &= \int_R^{-R} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx \\ &= - \int_{-R}^R e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{C_R^2} e^{-z^2} dz &= \int_{\frac{s}{2}}^0 e^{-(-R+iy)^2} i dy \\ &= -i \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-(-R+iy)^2} dy\end{aligned}$$

3.

$$\int_{C_R^3} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

4.

$$\int_{C_R^4} e^{-z^2} dz = i \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-(R+iy)^2} dy$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{C_R^2} e^{-z^2} dz + \int_{C_R^4} e^{-z^2} dz &= i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(R+iy)^2} - e^{-(-R+iy)^2} dy \\
 &= ie^{-R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{y^2} [e^{-i2Ry} - e^{i2Ry}] dy \\
 &= 2e^{-R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{y^2} \sin(2Ry) dy.
 \end{aligned}$$

Esta última igualdad implica que

$$\left| \int_{C_R^2} e^{-z^2} dz + \int_{C_R^4} e^{-z^2} dz \right| \leq 2e^{-R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{y^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Tomando límite cuando  $R \rightarrow \infty$  en  $\oint_{C_R} e^{-z^2} dz$  se deduce que

$$- \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 0$$

y por lo tanto

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

En consecuencia

$$\hat{f}(s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} I = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

**Proposición 3.3.2.** Si  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $g(x) = f(ax)$  entonces

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \tag{3.11}$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} g(x) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(ax) dx
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables  $y = ax$

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\frac{y}{a}} f(y) \frac{1}{a} dy \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\frac{y}{a}} f(y) dy & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-is\frac{y}{a}} f(y) dy & \text{si } a < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ -\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases} \\
 &= \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)
 \end{aligned}$$

■ **Observación.** Tomando  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $f(x) = e^{-x^2}$  tenemos

$$g(x) = f(ax) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y luego

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \sqrt{2}\hat{f}(\sqrt{2}s) \\ &= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{(\sqrt{2}s)^2}{4}} \\ &= e^{-\frac{s^2}{2}}\end{aligned}$$

Algunas transformadas de Fourier se resumen en la tabla 3.3.

	$f(x)$	$\hat{f}(x)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}$
2	$e^{-a x }, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+s^2}$
3	$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
4	$\frac{1}{a^2+x^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a s }$
5	$\begin{cases} -k &  x  \leq a \\ 0 &  x  > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\text{sen}(as)}{s}$

Cuadro 3.1: Algunas transformadas de Fourier

### 3.4. Aplicación a la resolución de EDPs

La transformada de Fourier es utilizable para ecuaciones en que una o más variables se mueven sobre dominios infinitos como  $\mathbb{R}$  o  $[0, \infty)$ . Ilustremos el método a través de algunos ejemplos.

#### 3.4.1. Ecuación del calor en una barra infinita

Consideremos la ecuación del calor en una barra infinita

$$\begin{aligned}(EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} & t > 0, -\infty < x < \infty \\ (CI) \quad u(0, x) &= f(x) & -\infty < x < \infty \\ (CB) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x)| dx &< \infty & t > 0\end{aligned}$$

La condición  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  tiene una doble finalidad. Por un lado nos garantiza que  $u(t, \cdot)$  posee transformada de Fourier, pero también dice que “ $u(t, -\infty) = u(t, \infty) = 0$ ”, es decir, sirve como condición de *borde en infinito*.

Aplicando  $TF$  en la variable  $x$  a la ecuación  $EC$  se obtiene

$$\hat{u}_t = \alpha \widehat{u_{xx}} = -s^2 \alpha \hat{u}$$

Ahora bien

$$\hat{u}_t(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, s)$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, s) = -s^2 \alpha \hat{u}(t, s).$$

Esto conduce a

$$\hat{u}(t, s) = \hat{u}(0, s) e^{-s^2 \alpha t} = \hat{f}(s) e^{-s^2 \alpha t}$$

y de aquí

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} e^{-s^2 \alpha t} \hat{f}(s) ds.$$

Usando la fórmula de la convolución y el hecho que  $T^{-1}(e^{-s^2 \alpha t}) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}$  deducimos que

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-(x-y)^2/4\alpha t} f(y) dy$$

Definamos

$$G(t, x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}$$

que se conoce como la función de Green de la ecuación (EC). Vemos entonces que

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x-y) f(y) dy.$$

**Ejercicio.** Probar  $u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(s(\xi-x)) e^{-s^2 \alpha t} d\xi ds$

**Interpretación:** Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¡Pareciera que  $G(0, x)$  está mal definido !

Sin embargo, observemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t, x) dx = 1 \quad \forall t > 0.$$

Así  $G(0, \cdot)$  puede interpretarse como la función  $\delta(\cdot)$  de Dirac. Notemos además que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \left[ \frac{x^2}{4\alpha t^2} - \frac{1}{2t} \right] \\ &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\alpha t \sqrt{4\pi\alpha t}} \left[ \frac{x^2}{2t} - \alpha \right] \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{x}{2\alpha t} \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\alpha t \sqrt{4\pi\alpha t}} \left[ \frac{x^2}{2\alpha t} - 1 \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \end{aligned}$$

de modo tal que  $G(t, x)$  puede interpretarse como la solución de

$$\begin{aligned} (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \\ (CI) \quad u(0, x) &= \delta(x) \end{aligned}$$

Asimismo  $v_y(x, t) = G(t, x - y)f(y)$  puede verse como solución de

$$\begin{aligned} (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \\ (CI) \quad u(0, x) &= \delta(x - y)f(y) \end{aligned}$$

es decir  $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy$  es solución de

$$\begin{aligned} (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \\ (CI) \quad u(0, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x - y)dy = f(x) \end{aligned}$$

Formalmente:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\partial G}{\partial t}(t, x - y)dy = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t, x - y)dy \\ &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy \end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy = f(x).$$

Lo que verifica (EC) y (CI).

### 3.4.2. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición en el extremo de tipo Dirichlet

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x > 0 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Para resolver este problema es útil la noción de extensión par de una función  $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (que por simplicidad seguimos denotando por  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$w(x) = \begin{cases} w(x) & x \geq 0 \\ -w(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Notar  $w$  es continua en  $\mathbb{R}$  si y sólo si  $w$  es continua en  $[0, \infty)$  y  $w(0) = 0$ .

Supongamos que  $u$  es solución de (3.12) y definamos  $v$  como la extensión impar de  $u$  con respecto a la variable  $x$ , es decir

$$v(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & x > 0 \\ -u(t, -x) & x < 0 \end{cases}$$

La función  $v(t, x)$  satisface

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha v_{xx} \\ v(0, x) &= f(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, si resolvemos la ecuación para  $v$  y encontramos una solución impar, como las soluciones de esta ecuación son continuas se tiene  $v(t, 0) = 0$ ,  $\forall t > 0$  y en consecuencia restringiendo  $v$  a  $[0, \infty)$  obtenemos la solución del problema original.

Notemos que  $f$  es impar de modo que

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 -f(-\xi) e^{-is\xi} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi + \int_{\infty}^0 f(\xi) e^{is\xi} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \underbrace{[e^{-is\xi} - e^{is\xi}]}_{-2i \operatorname{sen}(s\xi)} d\xi \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(s\xi) d\xi \end{aligned}$$

Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} e^{-s^2\alpha t} \hat{f}(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2\alpha t} e^{isx} \left[ \int_0^{\infty} f(\xi) i \operatorname{sen}(s\xi) d\xi \right] ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(s\xi) [-i \cos sx + \operatorname{sen}(sx)] e^{-s^2\alpha t} ds d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(s\xi) \operatorname{sen}(sx) e^{-s^2\alpha t} ds d\xi \end{aligned}$$

y notemos finalmente que  $v$  es impar con respecto a la variable  $x$ .

### 3.4.3. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición de Neumann

El problema es análogo al anterior, excepto por la condición de borde:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Para tratar este problema conviene utilizar la noción de extensión par de una función  $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , que denotamos por  $\bar{w} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} w(x) & x \geq 0 \\ w(-x) & x < 0. \end{cases}$$



$\bar{w}$  resulta ser continua si y sólo si  $w$  es continua. Además  $\bar{w}$  es derivable en 0 si y sólo  $w$  es derivable en 0 (utilizando la definición de derivada con límite lateral) y  $\frac{dw}{dx} = 0$ .

Si  $u$  es solución de (3.13) y se define  $v(t, x)$  como

$$v(t, x) = \begin{cases} v(t, x) & x \geq 0 \\ v(t, -x) & x < 0 \end{cases}$$

entonces  $v(t, x)$  satisface

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha v_{xx} & t > 0, -\infty < x < \infty \\ v(0, x) &= \bar{f}(x) & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

Por otro lado, si resolvemos la ecuación para  $v$  y encontramos que  $v$  es par, derivable y que  $\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0$ , entonces tenemos la solución de (3.13) (restringiendo  $v$  a  $[0, \infty)$ ).

**Ejercicio.** Probar que

$$v(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi) \cos(s\xi) \cos(sx) e^{-s^2 \alpha t} ds d\xi.$$

### 3.4.4. Problema de Dirichlet en un semiplano

En esta sección consideramos el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & y > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \\ u(x, \infty) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (3.14)$$

Aplicando  $TF$  en la variable  $x$  se obtiene

$$\widehat{u_{xx}} + \widehat{u_{yy}} = 0$$

y por lo tanto

$$-s^2 \hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = s^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(s, y) = a(s)e^{sy} + b(s)e^{-sy}$$

Usando las condiciones de borde

$$\begin{aligned} \hat{u}(s, 0) &= \hat{f}(s) = a(s) + b(s) \\ \hat{u}(s, \infty) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} a(s) = 0 & s > 0 \\ b(s) = 0 & s < 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \hat{u}(s, y) = \hat{f}(s)e^{-y|s|}$$

de donde

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} e^{-y|s|} \hat{f}(s) ds$$

Usando el Teorema de la convolución y el hecho que  $A(e^{-s|y|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + x^2}$  resulta

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + z^2} f(x-z) dz$$

Definamos

$$G(x, y) \triangleq \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2},$$

que se le llama función de Green de asociada al problema del semiplano.

Resulta

$$u(x, y) = [G(\cdot, y) * f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z)G(z, y)dz = \int_{\infty}^{-\infty} f(z)G(x - z, y)dz \quad (3.15)$$

**Ejercicio.** Probar que

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{y \rightarrow 0} G(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases} \\ 2) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y)dx = 1 \\ 3) \quad & \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

Interpretar  $G$  como solución de (3.14) con condición de borde  $u(x, y) = \delta(x)$ , e interpretar fórmula (3.15).

## Capítulo 4

# Tópicos adicionales en EDPs

### 4.1. Propiedad de la media para funciones armónicas

Consideremos un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica en  $\Omega$ , es decir

$$u \in C^2(\Omega), \quad \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Dado un punto  $p \in \Omega$  la bola

$$B_R(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < R\}$$

está contenida en  $\Omega$  si  $R > 0$  es suficientemente pequeño.

Definamos la función

$$f(r) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} u(x) dA(x), \quad r \in [0, R]$$

donde  $\alpha_n$  es el área del manto de la esfera de radio 1 en  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha_n r^{n-1}$  corresponde al área del manto de la esfera de radio  $r$ . La cantidad  $f(r)$  es el promedio de la función  $u$  sobre la esfera con centro  $p$  y radio  $r$ .

Nuestro objetivo es calcular la derivada de  $f$ , y para tal efecto conviene introducir un cambio de variables

$$f(r) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(p + ry) dA(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr}(r) &= \frac{d}{dr} \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} u(p + ry) dA(y) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{dr} u(p + ry) dA(y) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(p + ry) \cdot y dA(y) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(p + ry) \cdot \hat{n} dA(y) \end{aligned}$$

ya que sobre la superficie  $\partial B_1(0)$  se tiene  $\hat{n}(y) = y$ . Por lo tanto, cambiando de variables nuevamente

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr}(r) &= \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial u}{\partial n} dA \\ &= \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{B_r(p)} \Delta u \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que  $u$  es armónica. Luego  $f$  es constante y para averiguar cuál es esta constante observemos que

$$\begin{aligned} |f(r) - u(p)| &= \left| \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} (u(x) - u(p)) dA(x) \right| \\ &\leq \max_{x \in \partial B_r(p)} |u(x) - u(p)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

debido a la continuidad de  $u$ .

Hemos probado así

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica. Entonces si  $p \in \Omega$  y  $B_R(p) \subset \Omega$  se tiene*

$$u(p) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} u dA, \quad \forall 0 < r < R,$$

y

$$u(p) = \frac{n}{\alpha_n r^n} \int_{B_r(p)} u dV, \quad \forall 0 < r < R.$$

La segunda igualdad se deduce de multiplicar la primera por  $r^{n-1}$  e integrar. Observemos que la primera de estas fórmulas dice que si  $u$  es armónica entonces  $u(p)$  es igual al promedio de  $u$  sobre la esfera  $\partial B_r(p)$  y la segunda afirma que  $u(p)$  es igual al promedio de  $u$  sobre la bola  $B_r(p)$ .

## 4.2. Principio del máximo para funciones armónicas

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, conexo y sea  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica no constante. Entonces  $u$  no alcanza su máximo ni su mínimo en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $u$  alcanza su máximo en  $\Omega$ , es decir, que existe  $x_0 \in \Omega$  tal que

$$u(x) \leq u(x_0) \quad \forall x \in \Omega.$$

Consideremos  $R > 0$  tal que  $B_R(x_0) \subset \Omega$ . Entonces para todo  $0 < r < R$  por la fórmula de la media deducimos que

$$0 = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x_0) - u(x)) dA(x).$$

Pero por hipótesis  $u(x_0) - u(x) \geq 0$  para todo  $x \in \partial B_r(x_0)$  por lo que  $u(x_0) - u(x) = 0$  para todo  $x \in \partial B_r(x_0)$  (si  $u(x_0) - u(x) > 0$  para algún punto  $x \in \partial B_r(x_0)$  la integral resultaría positiva.)

Esto muestra que  $u(x) = u(x_0)$  para todo  $x \in B_R(x_0)$ . Veamos ahora que  $u(x) = u(x_0)$  para todo  $x \in \Omega$ . Recordemos que dado  $\bar{x} \in \Omega$  como  $\Omega$  es conexo existe un camino  $\gamma$  continuo que une  $x_0$  con  $\bar{x}$  y que está contenido en  $\Omega$ . Utilizando el hecho que  $\Omega$  es abierto y el camino  $\gamma$  es compacto se puede encontrar una secuencia finita de puntos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m = \bar{x}$  en  $\gamma$  y  $R > 0$ , tales que las bolas  $B_R(x_k)$   $k = 0, 1, \dots, m$  están contenidas en  $\Omega$  y  $x_{k+1} \in B_R(x_k)$  para  $k = 0, 1, \dots, m-1$ . Hemos probado que  $u(x) = u(x_0)$  para todo  $x \in B_{R_0}(x_0)$  y luego  $u(x_1) = u(x_0) = \max_{\Omega} u$ . Repitiendo el argumento anterior se encuentra que  $u(x) = u(x_1)$  para todo  $x \in B_R(x_1)$ , y por inducción se prueba que  $u(\bar{x}) = u(x_0)$ . Luego  $u$  es constante en  $\Omega$ , lo cual es una contradicción.

Mediante una demostración análoga se prueba que  $u$  no puede alcanzar su mínimo en  $\Omega$ . □

**Corolario 4.2.2.** *Supongamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, conexo y acotado y que  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y armónica en  $\Omega$ . Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

y

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Recordemos que  $\overline{\Omega}$  denota la adherencia de  $\Omega$ .

*Demostración.* Bajo las hipótesis de este corolario, el máximo de  $u$  se alcanza en algún punto  $x_0 \in \overline{\Omega}$ . Si  $x_0 \in \Omega$  por el teorema anterior  $u$  es constante y (4.2) es cierto. Si  $x_0 \in \partial\Omega$  vemos que (4.2) también vale.  $\square$

El teorema 4.2.1 es más fuerte que el corolario 4.2.2, ya que mientras este último resultado dice que si  $u$  es armónica entonces  $u$  siempre alcanza un máximo en  $\Omega$ , el teorema afirma que si el máximo se llegara a alcanzar dentro de  $\Omega$  entonces  $u$  sería constante. Por este motivo al primero de estos resultados se le llama el principio del máximo fuerte, mientras que al segundo se le dice principio del máximo débil.

### 4.3. Principio del máximo para la ecuación del calor

Consideramos la ecuación del calor en una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierta y acotada. En realidad, la región donde se plantea la ecuación del calor es

$$Q_T = (0, T) \times \Omega,$$

donde  $T > 0$ .

Supondremos que  $u = u(t, x)$  está definida para  $(t, x) \in \overline{Q}_T$  y que  $u$  es una función continua en  $\overline{Q}_T$  y  $C^2(Q_T)$ . Diremos que  $u$  satisface la ecuación del calor si

$$u_t(t, x) = \Delta u(t, x) \quad \forall (t, x) \in Q_T = (0, T) \times \Omega. \quad (4.1)$$

Definamos

$$\Gamma_T = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega).$$

Intuitivamente  $Q_T$  es un cilindro no uniforme con base igual a  $\Omega$  y altura  $T$ , y  $\Gamma_T$  es una parte de la frontera de  $Q_T$  que corresponde a la base y el manto lateral (sin incluir la “tapa” superior).

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $u : \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $u \in C^2(Q_T)$  que satisface la ecuación del calor (4.1) en  $Q_T$ . Entonces*

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u, \quad (4.2)$$

y

$$\min_{\overline{Q}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

**Observación.** Este teorema se conoce como el *principio del máximo débil* para la ecuación del calor y establece que el máximo de  $u$  siempre se alcanza en algún punto de  $\Gamma_T$ . En otras palabras el comportamiento de  $u$  sólo toma en cuenta los valores de esta función en  $\Gamma_T$ , es decir los valores en el instante inicial ( $t = 0$ ) y los valores en el borde de  $\Omega$  para todo  $t \in (0, T)$ . Esto concuerda con la noción de que la variable  $t$  representa el tiempo, y que lo que ocurre en el tiempo  $t = T$  viene descrito por la condiciones del problema.

*Demostración.* Probaremos que si  $0 < S < T$  entonces

$$\max_{\overline{Q}_S} u = \max_{\Gamma_S} u.$$

La conclusión se obtiene luego haciendo  $S \nearrow T$ . Supongamos que  $\max_{\overline{Q}_S} u$  se alcanza en un punto  $(t_0, x_0)$  que no pertenece a  $\Gamma_S$ . Entonces, gracias a las condiciones necesarias de optimalidad sabemos que  $\nabla_x u(t_0, x_0) = 0$ , la matriz Hessiana  $\nabla^2 u(t_0, x_0)$  es semi-definida negativa y  $u_t(t_0, x_0) \geq 0$ . Tomando la traza de  $\nabla^2 u(x_0)$  vemos que  $\Delta u(t_0, x_0) \leq 0$ , por lo que

$$u_t(t_0, x_0) - \Delta u(t_0, x_0) \geq 0.$$

Esto no es suficiente para una demostración pero sólo falta un pequeño *truco*. En efecto, consideremos  $\varepsilon > 0$  y la función

$$v(t, x) = u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2.$$

$v$  es continua en  $\overline{Q}_S$  y por lo tanto  $\max_{\overline{Q}_S} v$  se alcanza, digamos en  $(t_1, x_1) \in \overline{Q}_S$ . Si  $(t_1, x_1)$  no pertenece a  $\Gamma_S$  repitiendo el argumento anterior podemos afirmar que  $\Delta v(t_1, x_1) \leq 0$  y  $v_t(t_1, x_1) \geq 0$ , por lo que

$$v_t(t_1, x_1) - \Delta v(t_1, x_1) \geq 0.$$

Pero un cálculo directo muestra que

$$v_t(t_1, x_1) - \Delta v(t_1, x_1) = u_t(t_1, x_1) - \Delta u(t_1, x_1) - 2n\varepsilon = -2n\varepsilon < 0,$$

lo que es una contradicción. Hemos probado que necesariamente  $(t_1, x_1) \in \Gamma_S$ , por lo que

$$\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} (u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2) = \max_{(t,x) \in \Gamma_S} (u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2).$$

De aquí se deduce

$$\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} u(t, x) \leq \max_{(t,x) \in \Gamma_S} (u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2) \leq \left( \max_{(t,x) \in \Gamma_S} u(t, x) \right) + \varepsilon \left( \max_{(t,x) \in \Gamma_S} \|x\|^2 \right)$$

y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos

$$\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} u(t, x) \leq \max_{(t,x) \in \Gamma_S} u(t, x).$$

La desigualdad  $\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} u(t, x) \geq \max_{(t,x) \in \Gamma_S} u(t, x)$  es siempre cierta dado que  $\Gamma_S \subset \overline{Q}_S$ . Esto prueba (4.2).  $\square$

#### 4.4. Unicidad para la ecuación de Laplace y el calor

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $\Omega$  una región abierta y acotada en  $\mathbb{R}^n$ , y sean  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funciones. Entonces existe a lo más una función  $u$  en  $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Demostración.* Si  $u_1, u_2$  son dos soluciones del problema anterior, entonces  $u = u_1 - u_2$  satisface  $\Delta u = 0$  en  $\Omega$  y  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Es decir  $u$  es armónica en  $\Omega$  y por el principio del máximo (corolario 4.2.2) se deduce que  $u \equiv 0$  en  $\Omega$ .  $\square$

**Teorema 4.4.2.** *Sea  $\Omega$  una región abierta y acotada en  $\mathbb{R}^n$ , y sean  $f : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : (0, T) \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funciones. Entonces existe a lo más una función  $u$  en  $C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^2((0, T) \times \Omega)$  solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

La demostración es una aplicación directa del teorema 4.3.1.

##### Ejercicio.

De una demostración del teorema de unicidad para la ecuación de Laplace (teorema 4.4.1) bajo la hipótesis que  $u_1, u_2$  son soluciones de clase  $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

utilizando el siguiente esquema

a) Pruebe la siguiente fórmula: si  $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  entonces

$$\int_{\Omega} \Delta uv = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \quad (4.3)$$

donde  $n$  es el vector unitario normal a la frontera de  $\Omega$ .

Indicación: utilice el teorema de la divergencia con el campo vectorial  $v \nabla u$ .

b) Pruebe que si  $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  y  $\Delta u = 0$  en  $\Omega$  y  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  entonces aplicando la fórmula anterior se deduce que  $\nabla u = 0$  en  $\Omega$  y concluya.

**Ejercicio.** Pruebe el principio del máximo débil (corolario 4.2.2) en el siguiente caso: si  $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  satisface

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces

$$u \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Siga los siguientes pasos:

a) Construya una función  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  con la siguientes propiedades

- i)  $\rho(t) = 0$  para todo  $t \leq 0$ ,
- ii)  $\rho(t) > 0$  para todo  $t > 0$ .

b) Aplique la fórmula (4.3) a  $v = \rho \circ u$  y deduzca que si  $x \in \Omega$  y  $u(x) > 0$  entonces  $\nabla u(x) = 0$ .

c) Podemos suponer que  $\Omega$  es conexo. Supongamos que existe un punto  $x \in \Omega$  con  $u(x) > 0$  y sea  $\gamma$  un camino diferenciable con  $\gamma(t) \in \Omega$  para  $t \in (0, 1]$ ,  $\gamma(0) = x_0 \in \partial\Omega$  y  $\gamma(1) = x$ . Sea  $t_1$  el *último*  $t$  donde  $u(\gamma(t)) = 0$ , en otras palabras

$$t_1 = \sup\{t \in [0, 1] : u(\gamma(t)) = 0\}$$

Observe que  $u(\gamma(t_1)) = 0$  y por la parte anterior  $\frac{d}{dt}u(\gamma(t)) = 0$  para todo  $t \in (t_1, 1)$ . Concluya.

**Ejercicio.** Para la ecuación del calor también es posible probar el teorema de unicidad y el principio del máximo débil *integrando por partes*. Para el teorema de unicidad puede proceder del siguiente modo: suponga que  $u \in C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^2((0, T) \times \Omega)$  satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Defina

$$E(t) = \int_{\Omega} |\nabla u(t, \cdot)|^2$$

y pruebe que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2 \int_{\Omega} u_t(t, \cdot)^2 \leq 0.$$

( $\nabla$  se refiere solo a las variables espaciales.) Deduzca que si  $u_0 \equiv 0$  entonces  $\nabla u(t, \cdot) \equiv 0$  y concluya.





# Índice de figuras

2.1. Dos soluciones fundamentales de la ecuación del calor . . . . .	21
2.2. Dominio semi-infinito para la ecuación de Laplace . . . . .	33
2.3. Cuerda de largo $\ell$ con un extremo fijo y el otro libre . . . . .	34
2.4. Dominio rectangular para la ecuación de Laplace . . . . .	37
3.1. Camino de integración para calcular $\widehat{e^{-x^2}}$ . . . . .	45



# Bibliografía

- [1] J. Bak, D.J. Newman, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] A. Castro, *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
- [3] R.V. Churchill, *Teoría de Funciones de Variable Compleja*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [4] P.V. O'Neil, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol. 2, Compañía Editorial Continental, México D.F., 1994.
- [5] A.D. Wunsch, *Variable compleja con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, Buenos Aires, 1997.