



# MA34B – Estadística

## Distribuciones en el Muestreo

Prof. Rodrigo Abt B.  
[rabt@dim.uchile.cl](mailto:rabt@dim.uchile.cl)

# Valores muestrales

- Al trabajar con una muestra  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , los valores obtenidos para dichas variables aleatorias se denominan *valores muestrales*.
- Se mencionó que es usual suponer que la distribución  $F$ , que rige la población no es del todo desconocida. Esto quiere decir, que se conoce al menos la familia de distribuciones a la cual pertenece.
- Si este es el caso, entonces interesará conocer las características desconocidas de dicha distribución.

# Estadísticos

- Por ejemplo, si tenemos que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una m.a.s. de una v.a.  $X$  tal que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , entonces será de interés determinar cuanto valen (o podrían valer)  $\mu$  y  $\sigma^2$
- Para lo anterior, suponemos que los valores muestrales deberían proporcionar una suerte de “fórmulas” para dar valores a dichos parámetros.
- Podríamos probar distintas funciones  $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  para los valores de la muestra.
- Las funciones de los valores muestrales son variables aleatorias denominadas *estadísticos*

# Distribuciones en el muestreo

- Obviamente, como  $T$  depende de las v.a.s.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , entonces  $T$  es también una variable aleatoria, y por ende tiene una distribución asociada.
- A las distribuciones de los estadísticos se les denominan *distribuciones en el muestreo*

# Estadísticos más frecuentes

- En Estadística, los estadísticos más utilizados son:
  1. La Media Muestral
  2. La Varianza Muestral
  3. Estadísticos de Orden
  4. Cuantilas

# La Media Muestral

- Se define la Media Muestral como:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Propiedades

- Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una m.a.s. de una v.a.  $X$  con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces:

- Esperanza

$$E(\bar{X}) = \mu$$

- Varianza

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Nota: Si el muestreo es sin reemplazo en una población de tamaño  $N$ , entonces:

$$Var(\bar{X}) = \left( \frac{N - n}{N - 1} \right) \frac{\sigma^2}{n}$$

# La Varianza Muestral

- Se define la Varianza Muestral como:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- Propiedades

- Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una m.a.s. de una v.a.  $X$  con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces:

- Esperanza

$$E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

- Varianza

$$Var(S_n^2) = \frac{n-1}{n^3} ((n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^4)$$

# Estadísticos de Orden (1)

- En que  $\mu_k = E[(X - \mu)^k]$
- Los estadísticos de orden son v.a.s. que resultan del ordenamiento creciente de los valores de la muestra:

$X_1, X_2, \dots, X_n$



$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, \dots, X_{(n)}$

## Estadísticos de Orden (2)

- Los estadísticos de orden más importantes son:  $X_{(1)}$ , que corresponde a  $\text{Min}(X_i)$ , y  $X_{(n)}$  que corresponde a  $\text{Max}(X_i)$
- Si  $F(x)$  es la F.d.a. de  $X$ , entonces :
  - La F.d.a. de  $X_{(1)}$  es:  $F^n(X)$
  - La F.d.a. de  $X_{(n)}$  es:  $1-(1-F(X))^n$

# Ejemplo: Variable Normal

- Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una m.a.s. de una v.a.  $X$  con distribución Normal  $N(\mu, \sigma^2)$

- Caso 1: Media Muestral

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Caso 2: Varianza Muestral

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

- Esta última distribución es la denominada “Chi cuadrado” con “n-1” grados de libertad, que resulta ser un caso particular de distribución Gamma de parámetros  $1/2, 1/2$ .

# La t-Student

- Otra distribución muestral muy usada en Estadística es la t-Student.
- Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son v.a.s. i.i.d., entonces la Media Muestral y la Varianza Muestral son independientes ssi  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

- Sea

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$V = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

- Entonces

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$