



MA34B – Estadística

Estimación Puntual

Prof. Rodrigo Abt B.

rabt@dim.uchile.cl

Problema

- El gerente de un supermercado ha encargado el estudio de una ampliación del sitio destinado a estacionamientos.
- Si la probabilidad de tener más de 100 autos en un día es mayor al 70% se deberá hacer la ampliación.
- De estudios similares, se sabe que el número de autos que llega en un día al estacionamiento sigue una distribución de Poisson.
- Se toma una muestra de 5 días en los cuales se mide la cantidad de autos que llegó al estacionamiento, y se obtienen los valores: 99, 102, 112, 97, 130.

Preguntas

¿Cómo calculo la probabilidad?

Planteamiento Formal

- Claramente para el cálculo de la probabilidad necesitamos conocer la tasa promedio de la distribución de Poisson.
- Podemos escribir el problema anterior de manera más formal:
 - Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a.s. de una v.a. X que sigue una distribución de Poisson con tasa λ .
 - ¿Cuánto vale λ ?

Estimadores y Estimaciones (1)

- Una manera natural de dar un valor para el parámetro buscado es con el promedio de los datos:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{5}(99 + 102 + 112 + 97 + 130) = 108$$

- Este valor corresponde a una *estimación* del parámetro.
- Mientras que la fórmula:

$$\hat{\lambda} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$

corresponde a un *estimador*.

Estimadores y Estimaciones (2)

- Un estimador es una fórmula, una expresión, que permite dar valores a parámetros desconocidos.
- Siguiendo la analogía de una preparación culinaria, el estimador correspondería a la receta, la muestra aleatoria de valores a los ingredientes, y la comida preparada a la estimación.



Características deseables

- Pero, en el problema planteado, ¿es realmente $\lambda=108$ una buena estimación?, o mejor dicho, es el promedio un buen estimador?
- ¿Qué entendemos por “bueno”?
- Un buen estimador debería al menos en promedio “achuntarle” al verdadero valor del parámetro estimado, es decir, debería ser tal que si $\hat{\lambda}$ es un estimador de λ , Es decir:

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda$$

- Si un estimador cumple con lo anterior se le denomina *insesgado*, y a la cantidad $E(\hat{\lambda}) - \lambda$ se le denomina “sesgo”

Precisión

- Sabemos que el valor de una estimación puede variar según la muestra que se tome, y por ende debemos tratar de evitar que las estimaciones sean muy dispersas.
- Por ende, debemos encontrar idealmente un estimador cuya precisión se pueda determinar para varias muestras, y además, que aumente a medida que crece el tamaño de la muestra.
- En este sentido, la varianza del estimador representa el grado de precisión del mismo.
- Por ende, preferiremos aquellos estimadores cuya varianza disminuya al crecer el tamaño de muestra “ n ”

Métodos Para Estimar

- ¿Cómo encontramos un estimador?
- Respuesta: a través de métodos de estimación. Los más comunes son:
 - Método de los Momentos
 - Método de Máxima Verosimilitud
 - Método de Bayes
- NOTA: El último método requiere de supuestos adicionales.

Método de los Momentos

- La ley de los grandes números nos muestra que

$$m_r = \frac{1}{n} \sum X_i^r \rightarrow \mu_r \text{ (c.s.)}$$

- Luego, sería natural estimar el momento de orden teórico con el momento de orden muestral, es decir:

$$\hat{\mu}_r = m_r$$

Método de Máxima Verosimilitud

- Se llama función de verosimilitud a la densidad conjunta del vector conformado por los valores muestrales x_1, x_2, \dots, x_n :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n / \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i / \theta)$$

- El estimador máximo verosímil es aquella expresión $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que hace máxima la función de verosimilitud.

Método de Bayes (1)

- El método de Bayes asume la existencia de una distribución a priori para el parámetro desconocido, por lo cual se convierte en v.a. a su vez.
- Al igual que en el caso de la Teoría de Decisiones, se procede a recalcular la distribución del parámetro, dados los resultados de la muestra, obteniéndose una distribución a posteriori:

$$\xi(\theta|x) = \frac{f_n(x/\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f_n(x/\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

Método de Bayes (2)

- Si consideramos una función de pérdida $L(\theta, \delta(x))$, en que $\delta(x)$ es un estimador de θ , entonces es natural encontrar un estimador que minimice dicha pérdida.
- Un estimador de Bayes es solución de:

$$\min_{\delta} E[L(\theta, \delta(x))]$$

- Existen diversas funciones de pérdidas, como la cuadrática, la absoluta y la pérdida “0-1”, siendo la más utilizada, la cuadrática.
- Para el último caso, el estimador de Bayes es simplemente el valor esperado de $\theta | X$, o sea, se obtiene con la esperanza de la distribución a posteriori.