



# Análisis de Señales

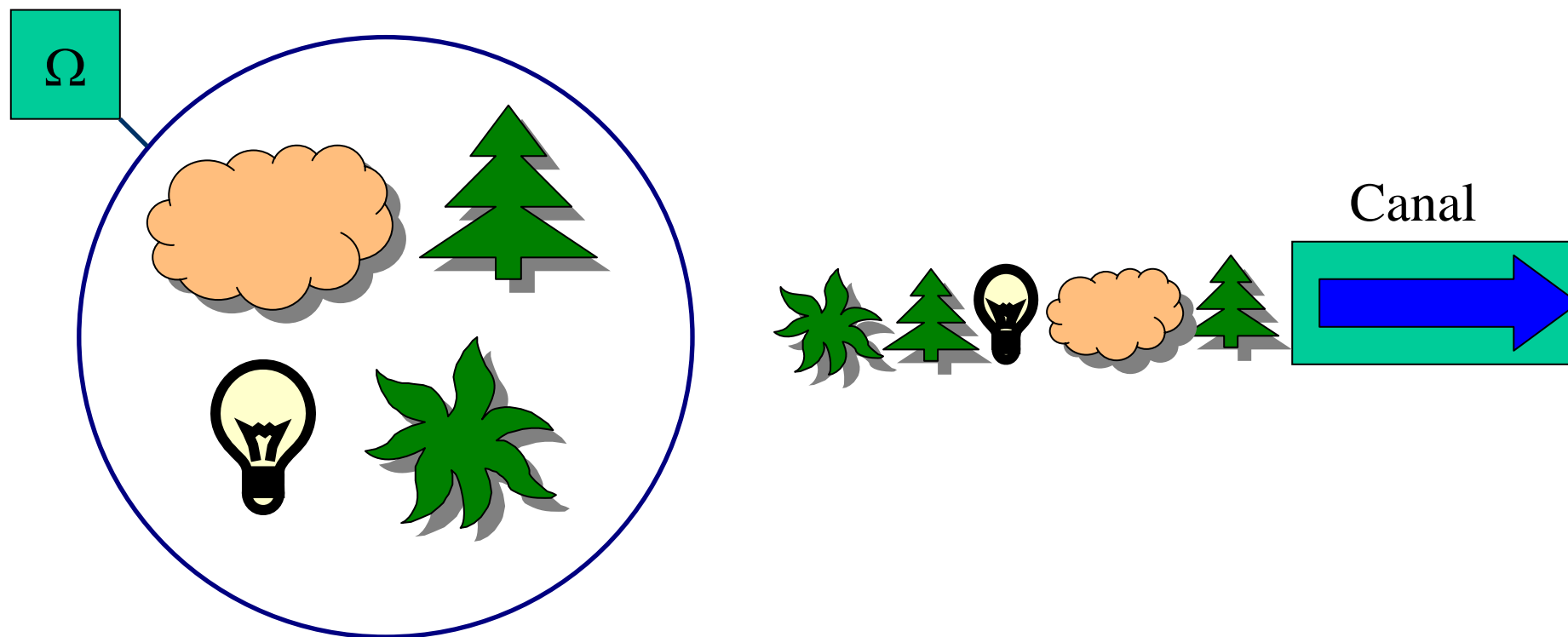
## Capítulo VIII: Transmisión de información

Profesor: Néstor Becerra Yoma



## 1.1 Probabilidades de símbolos

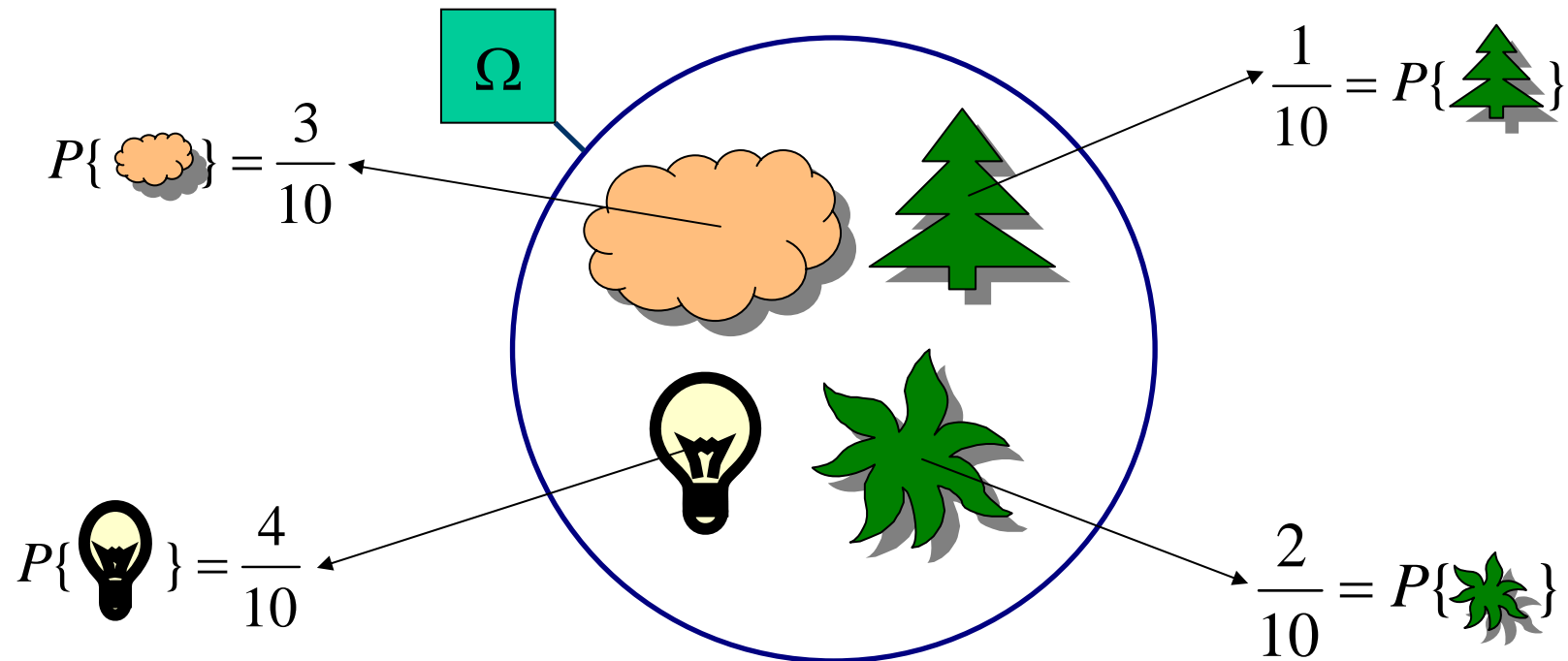
- Se tiene un conjunto de varios símbolos, los que son enviados constantemente a través de un canal.





## 1.1 Probabilidades de símbolos

- A cada símbolo se le puede asociar una probabilidad de acuerdo a la frecuencia con que es enviado a través del canal.





## 1.1 Probabilidades de símbolos

- La probabilidad de enviar un símbolo A o un símbolo B es igual a la suma de las probabilidades de enviar cada uno.

$$P\{ \text{🌲}, \text{☁️} \} = P\{ \text{🌲} \} + P\{ \text{☁️} \}$$



## 1.1 Probabilidades de símbolos

- La probabilidad de que se envíe una secuencia de símbolos dada (un mensaje) se obtiene multiplicando la probabilidad de cada símbolo a enviar.
- Lo anterior es válido suponiendo independencia entre los símbolos (el símbolo anterior no influye en el próximo a enviar)

$$P\{(\text{🌲}, \text{☁️}, \text{💡})\} = P\{\text{🌲}\} \times P\{\text{☁️}\} \times P\{\text{💡}\}$$



## 1.2 Representación de mensajes

- Para poder enviar los mensajes por el canal es necesario codificar cada símbolo mediante una secuencia de bits
- Uno de los métodos más eficientes para asignar secuencias de bits a los símbolos es el algoritmo de Huffman que asigna secuencias más largas a los símbolos menos probables.
- Este método se usa comúnmente para comprimir archivos de computador (tipo winzip)



## 1.2 Representación de mensajes

- Ejemplo: Se tiene el siguiente mensaje:
  - “mi mama me mima”
- Encontrar una secuencia de bits para cada símbolo (carácter) de modo de que el largo en bits del mensaje sea mínimo
  - Primero se deben calcular las probabilidades para cada símbolo. Par esto, se cuenta cuántas veces aparece cada uno.

‘m’=6      ‘ ’=4      ‘a’=3      ‘i’=2      ‘e’=1



## 1.2 Representación de mensajes

‘m’=6      ‘ ’=4      ‘a’=3      ‘i’=2      ‘e’=1

$$P\{m\} = \frac{6}{16}, \quad P\{ \text{' '} \} = \frac{4}{16}, \quad P\{a\} = \frac{3}{16}, \quad P\{i\} = \frac{2}{16}, \quad P\{e\} = \frac{1}{16}$$

- Ahora se debe ir formando un árbol del siguiente modo: “se eligen los 2 símbolos menos probables y se agrupan como un nuevo símbolo”





## 1.2 Representación de mensajes

$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
m	‘ ’	a	i	e

- Se agrupan la ‘i’ y la ‘e’, ya que son los menos probables



## 1.2 Representación de mensajes

$$\frac{6}{16}$$

m

$$\frac{4}{16}$$

‘ ’

$$\frac{3}{16}$$

a

$$\frac{3}{16}$$

i e

- Se agrupan la ‘ie’ y la ‘a’, ya que son los menos probables



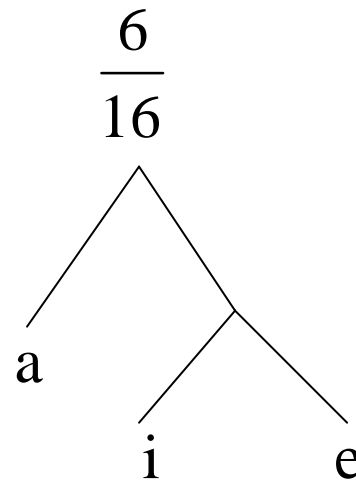
## 1.2 Representación de mensajes

$$\frac{6}{16}$$

m

$$\frac{4}{16}$$

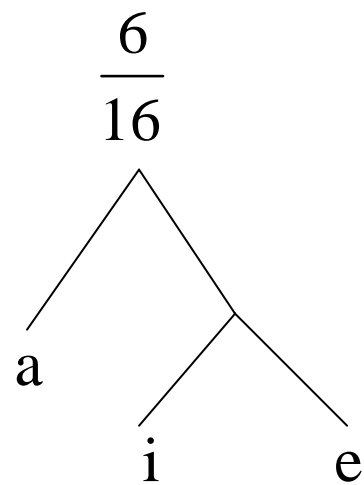
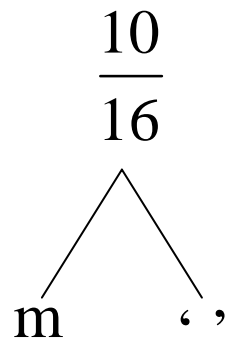
‘ ’



- Se agrupan la ‘m’ y el ‘ ’, ya que son los menos probables



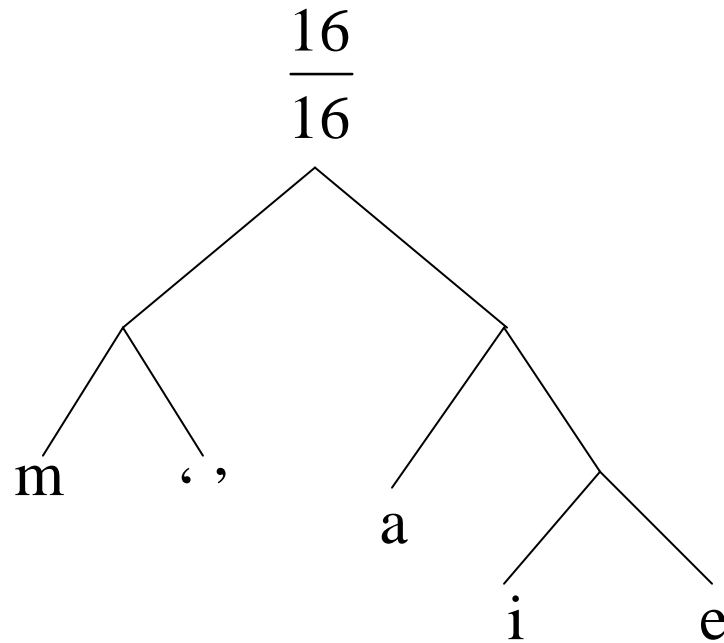
## 1.2 Representación de mensajes



- Se agrupan los dos últimos que quedan



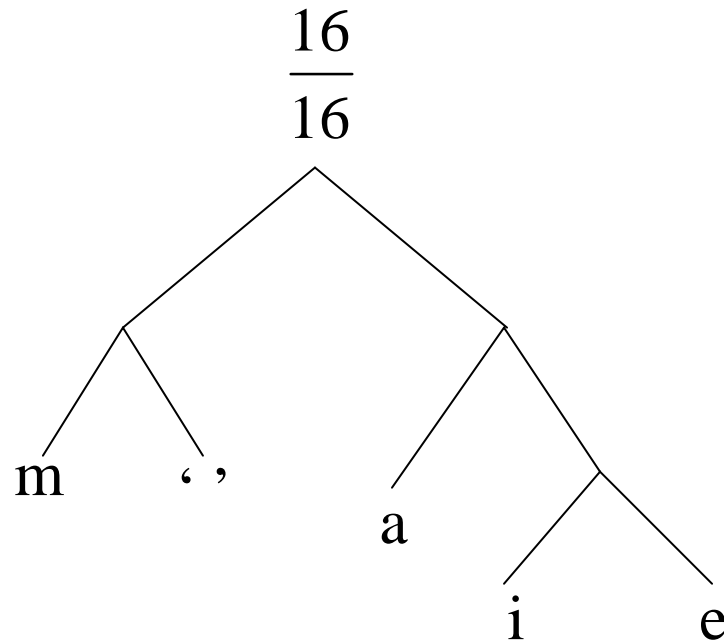
## 1.2 Representación de mensajes



- Tenemos todos los símbolos agrupados en un árbol. Ahora hay que asignarles las secuencias de bits



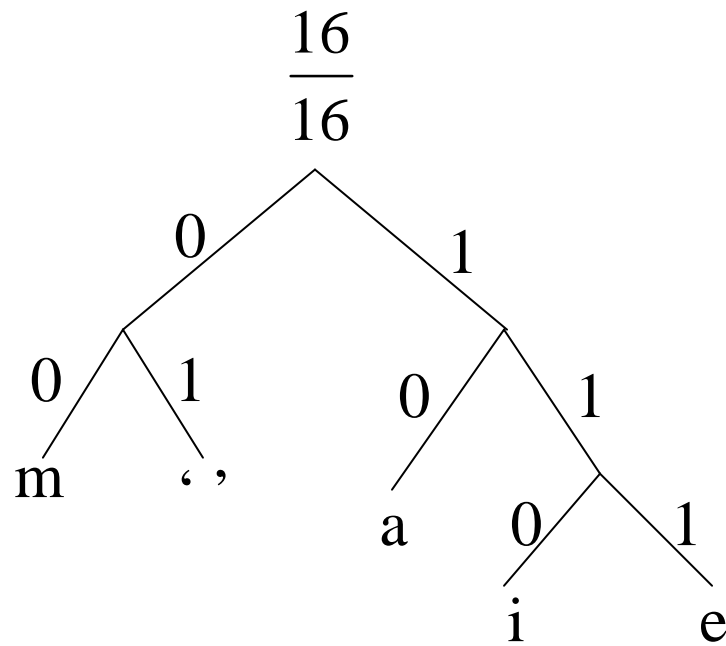
## 1.2 Representación de mensajes



- Para esto, asignamos '1' al ir hacia la derecha y '0' al ir hacia la izquierda



## 1.2 Representación de mensajes



‘m’=00

‘ ’=01

‘a’=10

‘i’=110

‘e’=111



## 1.2 Representación de mensajes

$$\text{'m'}=00 \quad P\{m\} = \frac{6}{16}$$

$$\text{' '}=01 \quad P\{ \} = \frac{4}{16}$$

$$\text{'a'}=10 \quad P\{a\} = \frac{3}{16}$$

$$\text{'i'}=110 \quad P\{i\} = \frac{2}{16}$$

$$\text{'e'}=111 \quad P\{e\} = \frac{1}{16}$$

- Se puede apreciar que los símbolos más probables recibieron secuencias de bits cortas, mientras que los menos probables recibieron secuencias de bits más largas
- De este modo, el mensaje queda codificado con la mínima cantidad de bits





## 1.2 Representación de mensajes

‘m’=00   ‘ ’=01   ‘a’=10   ‘i’=110   ‘e’=111

“mi\_mama\_me\_mima”=  
=001100100100010010011101001100010

- La otra alternativa (la más obvia) era asignar el mismo largo a todas las secuencias de bits, sin embargo, el largo total del mensaje habría sido mayor.



## 1.3 Información

- La información asociada a un símbolo  $x$  se define del siguiente modo:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{P(x)} [bit]$$

- $I(x)$  representa la mínima cantidad de bits necesaria para representar al símbolo  $x$ . Los símbolos menos probables tienen mayor información.
- Resulta interesante ver cómo se puede calcular la cantidad de información que contiene un mensaje dado



## 1.3 Información

- Supongamos que se tiene un mensaje de 3 símbolos independientes:

$$P\{(a,b,c)\} = P\{a\} \times P\{b\} \times P\{c\}$$

$$\frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \frac{1}{P\{a\}} \times \frac{1}{P\{b\}} \times \frac{1}{P\{c\}}$$

$$\log_2 \frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \log_2 \left( \frac{1}{P\{a\}} \times \frac{1}{P\{b\}} \times \frac{1}{P\{c\}} \right)$$

$$\log_2 \frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \log_2 \frac{1}{P\{a\}} + \log_2 \frac{1}{P\{b\}} + \log_2 \frac{1}{P\{c\}}$$

$$I(a,b,c) = I(a) + I(b) + I(c)$$



## 1.3 Información

$$I(a, b, c) = I(a) + I(b) + I(c)$$

- Se puede apreciar que la cantidad de información que contiene un mensaje es igual a la suma de la información que contiene cada símbolo.
- La información que contiene un mensaje representa la mínima cantidad de bits necesaria para representarlo



## 1.3 Información

- Ejemplo: Los símbolos A, B, C, D ocurren con probabilidad  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  y  $\frac{1}{8}$  respectivamente. Calcular la información que contiene el mensaje “BDA”
  - Solución:
  - $I(A) = \log_2(1/(\frac{1}{2})) = \log_2(2) = 1[\text{bit}]$
  - $I(B) = \log_2(4) = 2[\text{bit}]$
  - $I(D) = \log_2(8) = 3[\text{bit}]$
  - $I(\text{“BDA”}) = 2 + 3 + 1 = 6[\text{bit}]$



## 1.3 Información

- Entropía: La entropía es la información que posee en promedio un símbolo que pasa por el canal

$$H = E(I(x)) = \sum_{i=1}^N P(x_i) I(x_i) = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} [bit]$$

- La tasa de transmisión de información es igual a

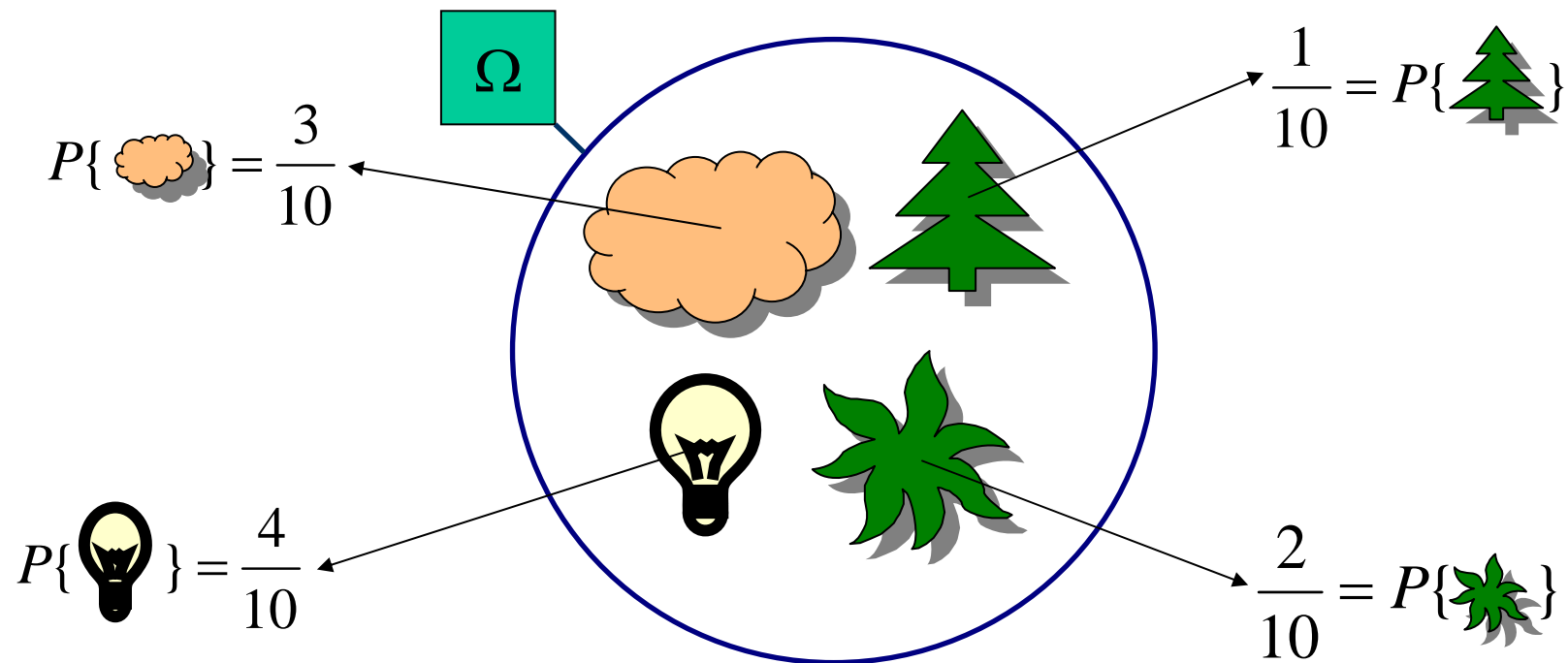
$$R = rH [bps]$$

- Donde  $r$  es la tasa de símbolos (símbolos/segundo)



## 1.3 Información

- Ejemplo: calcular la entropía del conjunto  $\Omega$ .





## 1.3 Información

$$P\{\text{tree}\} = \frac{1}{10}$$

$$P\{\text{star}\} = \frac{2}{10}$$

$$P\{\text{cloud}\} = \frac{3}{10}$$

$$P\{\text{lightbulb}\} = \frac{4}{10}$$

$$I(\text{tree}) = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{10}} = \log_2 10 = 3.322$$

$$I(\text{star}) = \log_2 \frac{1}{\frac{2}{10}} = \log_2 5 = 2.322$$

$$I(\text{cloud}) = \log_2 \frac{1}{\frac{3}{10}} = \log_2 \frac{10}{3} = 1.737$$

$$I(\text{lightbulb}) = \log_2 \frac{1}{\frac{4}{10}} = \log_2 \frac{5}{2} = 1.322$$

$$H = \frac{1}{10} \times 3.322 + \frac{2}{10} \times 2.322 + \frac{3}{10} \times 1.737 + \frac{4}{10} \times 1.322$$

$$H = 1.8465[\text{bit}]$$





## 1.4 Capacidad de canal

- Representa la máxima tasa de información que se puede transmitir por un canal (en bits por segundo).
- No depende de si la información es análoga o digital.
- Los canales generalmente se caracterizan por su ancho de banda (en Hertz) y la cantidad de ruido. Como referencia se utiliza el ruido blanco Gaussiano (WGN, *White Gaussian Noise*).



## 1.4 Capacidad de canal

- El teorema de Hartley-Shannon relaciona la capacidad máxima teórica del canal con el ancho de banda (en Hz) y la razón señal a ruido:

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

C : capacidad del canal [bps]

B : ancho de banda [Hz]

S/N : razón señal a ruido (no SNR)