

Control 2: Crecimiento

Instrucciones: El control posee 100 puntos y una duración de 100 minutos. Si encuentra algún error en el planteamiento de una pregunta o falta de información, escriba el supuesto que estime necesario para continuar, en su hoja de respuesta.

1. **(15 puntos)** Durante los años 70s y 80s Chile implementó un conjunto de reformas estructurales pro-mercado. Estas reformas permitieron el acceso a mejores tecnologías y procesos productivos. Durante la década que siguió a estas reformas (1985 – 1997) Chile creció en promedio por sobre el 7 %, cerca de 4 puntos porcentuales por sobre su crecimiento anual histórico y 3 puntos porcentuales sobre la tasa de crecimiento que ha experimentado desde entonces (1998 – 2004). Analice, en el contexto del modelo de Solow, la experiencia chilena de las últimas 3 décadas. Describa los factores que pueden explicar estas variaciones en la tasa de crecimiento, la trayectoria de la misma y el nivel de ingreso esperado.
2. **(15 puntos)** Comente sólo una de las siguientes dos aseveraciones:
 - a) En el encuentro de economía de Chile 2005, los jefes del equipo económico de los 4 candidatos presidenciales mencionaron la necesidad de aumentar la tasa de inversión en nuestro país para lograr que Chile sea un país desarrollado en un plazo cercano.
 - b) La tasa de ahorro nacional (fracción del PGB destinada al ahorro) en Japón es 35 %. En Argentina esa tasa es sólo 17 %. Para aumentar el ahorro, varios analistas han propuesto fomentar la inmigración de japoneses al país trasandino.
3. **(30 puntos)** Desarrolle un modelo de equilibrio general microfundado que permita analizar el efecto de un impuesto al ingreso del trabajo en el empleo total. Se recomienda usar una función de utilidad del tipo

$$u(c_t, l_t) = \log c_t + \gamma \log(o_t) \quad (1)$$

donde u es la función de utilidad en el periodo t , c_t es el consumo y o_t es el ocio definido como la dotación total de tiempo disponible menos el trabajo ($o_t = 1 - l_t$) en el periodo t . Haga todos los supuestos que considere necesarios. Al responder esta pregunta defina y caracterice el equilibrio general competitivo para esta economía.

4. **(40 puntos)** Suponga una función de producción agregada dada por:

$$Y = F(K, L) \quad (2)$$

donde estamos ignorando los incrementos de productividad; K y L denotan respectivamente capital y trabajo; y la función de producción F exhibe retornos constantes

de escala, es creciente en cada uno de sus argumentos, tiene retornos decrecientes en cada uno de los argumentos y cumple con las condiciones de Inada. La razón capital-trabajo se denota mediante $k = K/L$ y la forma intensiva de la función de producción viene dada por

$$y = f(k) = F(K, 1) \quad (3)$$

La dinámica del capital queda caracterizada por:

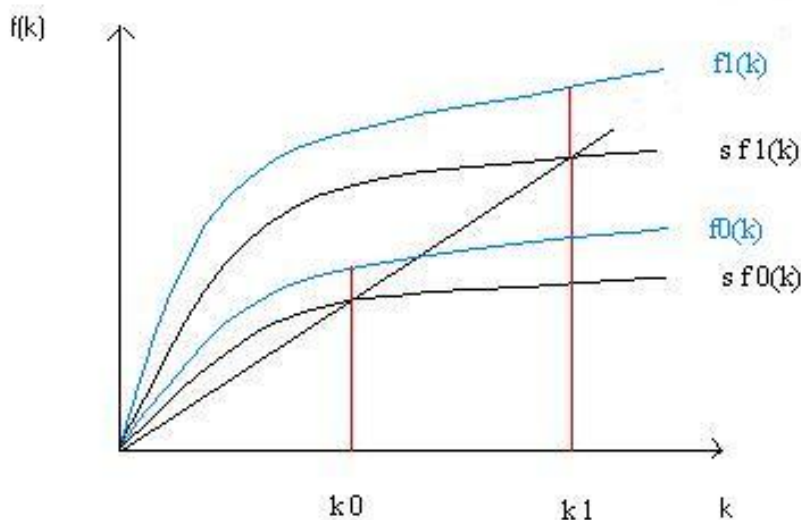
$$\Delta k = k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - (n + \delta)k_t \quad (4)$$

para un t cualquiera, donde s , n y δ denotan la tasa de ahorro, tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital, respectivamente. Las tres tasas son exógenas al modelo. Supongamos una economía pobre, es decir, que tiene un nivel de capital menor a su capital de largo plazo.

- a) Demuestre que en esta economía el equilibrio de largo plazo está caracterizado por un estado estacionario.
- b) ¿Bajo qué supuestos el pago al capital r y el pago al servicio del trabajo w estarán dados por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ y $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$, respectivamente?
- c) Muestre que $r = f'(k)$ y $w = f(k) - kf'(k)$. Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.
- d) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que $rK + wL = F(K, L)$.
- e) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.
- f) Suponga que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de cambio del pago al capital, $\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r}$, y la tasa de cambio del salario $\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w}$. Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.
- g) La tasa de retorno al capital en Chile durante los últimos 3 años ha sido considerablemente mayor que en años anteriores (*v.g.*, IPSA, IGPA). ¿Es posible explicar este fenómeno en el contexto de esta economía? Justifique.
- h) Los salarios reales (medidos correctamente) vienen creciendo sostenidamente en los últimos años, sin que se note una caída en la tasa de crecimiento (del salario). ¿Es posible explicar este fenómeno en el contexto de esta economía? Justifique.

Solución

1. Antes de 1985, suponemos que Chile estaba en estado estacionario y $\gamma_{ee}^Y = \gamma_{ee}^K = 3\%$. Entre 1985 y 1997 las reformas generan aumentos en la productividad, es decir:



la curva $f(\tilde{k})$ se desplaza hacia arriba, por lo que Chile pasa a una transición a un nuevo estado estacionario. Es decir, la tasa de crecimiento del ingreso debería ser mayor que $3\% = z$, esto implica que $\gamma_t^K > z = 3\%$. Matemáticamente la situación de Chile entre 1985 y 1997 se puede escribir de la siguiente manera (suponiendo una función de producción Cobb-Douglas):

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= (K_{t+1})^\alpha (A_{t+1} N_{t+1})^{1-\alpha} \\ Y_{t+1} &= (K_t (1 + \gamma_t^K))^\alpha (A_t N_t (1 + z))^{1-\alpha} \\ Y_{t+1} &= Y_t \left(\frac{1 + \gamma_t^K}{1 + z} \right)^\alpha (1 + z) \end{aligned}$$

Donde:

$$(1 + \gamma_t^Y) = \left(\frac{1 + \gamma_t^K}{1 + z} \right)^\alpha (1 + z) > (1 + z) = (1 + \gamma_{ee}^Y)$$

Lo que según enunciado es :

$$(1 + 7\%) > (1 + 3\%)$$

Después de 1998 la tasa de crecimiento se hizo más baja porque la economía alcanzó el nuevo estado estacionario.

También podría argumentarse que la tasa de ahorro exógena s bajó o que n subió.

2. a) En el contexto del modelo de Solow, una mayor inversión s genera un mayor mayor nivel de producto. Sin embargo, los datos indican que lo importante no es la cantidad de la inversión, sino más bien la calidad de ella. Es decir, debe estar orientada a aumentos en la eficiencia en la producción, representada por la productividad total de factores en el modelo de Solow.
- b) La evidencia sugiere que el ahorro se explica por factores tecnológicos o institucionales, traducidos en incentivos (desincentivos) que puedan proveer sus autoridades para fomentar (reducir) el ahorro (como por ejemplo subsidios o impuestos al ahorro, ahorro obligatorio, etc.).
Entonces para el caso de Argentina, si las autoridades argentinas no fomentan el ahorro ni privado ni público a través de incentivos (por ejemplo el corralito), la política de inmigración de japoneses será ineficaz.
3. Un Equilibrio General Microfundado se define como los precios al pago de los factores de producción y asignaciones para las variables de decisión de los problemas del consumidor y la firma representativa. Luego, para esta economía un EGM quedará descrito por: (1) precios w_t (salario) y r_t (precio de arriendo del capital) y (2) asignaciones para las cantidades c_t , i_t , l_t , y_t y k_t tales que:
 - a) Dados los precios $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ la secuencia $\{c_t, i_t, l_t^s, k_t^s\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve el problema de las familias:

$$\max_{s.a.} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log c_t + \log(1 - l_t^s)]$$

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= w_t l_t^s (1 - \tau) + r_t k_t^s + T & \forall t & \quad (RP) \\ k_{t+1}^s &= (1 - \delta) k_t^s + i_t & \forall t & \quad (R. Dinámica) \\ c_t, l_t^s, i_t, k_{t+1}^s &\geq 0 & \forall t \geq 0 & \\ k_0 &> 0 & & \end{aligned}$$

Supuestos: Impuesto τ al ingreso del trabajo, Devolución de suma alzada T .

- b) En cada período t , dados los precios $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$: el producto, la demanda por capital y trabajo $\{y_t, l_t^d, k_t^d\}_{t=0}^{\infty}$ resuelven el problema de la firma:

$$\begin{aligned} \max_{s.a.} y_t - w_t l_t^d - r_t k_t^d \\ y_t &= (k_t^d)^\alpha (l_t^d)^{1-\alpha} & \forall t & \quad (R. Tecnológica) \\ l_t^d, k_t^d &\geq 0 & \forall t & \end{aligned}$$

Supuestos: Función de Producción Cobb-Douglas.

c) Los mercados cierran en cada período, *i.e.*:

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + i_t & (OA = DA) \\ k_t^s &= k_t^d & (\text{oferta igual demanda en mercado del capital}) \\ l_t^s &= l_t^d & (\text{oferta igual demanda en mercado del trabajo}) \end{aligned}$$

d) El EGM queda caracterizado por la solución del problema de las familias y las firmas. Antes de resolver podemos simplificar un poco el problema, llamemos k_t al stock de capital de equilibrio, *i.e.* $k_t \equiv k_t^d = k_t^s$. Análogamente, llamamos $l_t \equiv l_t^d = l_t^s$.

Es conveniente resolver primero el problema de las firmas. Pues, nos dará una guía de la forma de las expresiones que nos gustaría obtener para las variables de decisión de las familias. Como este es un EGM la firma resuelve en cada período sus demandas óptimas de capital (k_t) y trabajo (l_t). Las C.P.O. asociadas a cada una de esas variables respectivamente son:

$$\alpha \left(\frac{l_t}{k_t} \right)^{1-\alpha} - r_t = 0 \quad (5)$$

$$(1 - \alpha) \left(\frac{k_t}{l_t} \right)^{\alpha} - w_t = 0 \quad (6)$$

De (5) y (6) podemos despejar los precios en función de las variables:

$$r_t = \alpha \left(\frac{k_t}{l_t} \right)^{-(1-\alpha)} \quad (7)$$

$$w_t = (1 - \alpha) \left(\frac{k_t}{l_t} \right)^{\alpha} \quad (8)$$

Lo que nos permitirá obtener un sistema de ecuaciones para las variables y nos da una guía del tipo de expresiones que queremos obtener de aquí en adelante (k_t/l_t).

Escribiendo el lagrangeano del problema de las familias:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log(c_t) + \log(1-l_t)] - \lambda_t^1 [c_t + i_t - w_t l_t (1-\tau) - r_t k_t - T] - \lambda_t^2 [k_{t+1} - (1-\delta)k_t - i_t]$$

Las C.P.O. para este problema son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_t} &= \frac{\beta^t}{c_t} - \lambda_t^1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l_t} &= -\frac{\beta^t}{1-l_t} - \lambda_t^1 (1-\tau) w_t = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial i_t} &= -\lambda_t^1 + \lambda_t^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} &= \lambda_{t+1}^1 r_{t+1} - \lambda_t^2 + \lambda_{t+1}^2 (1-\delta) = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo queda:

$$\begin{aligned}\frac{(1-\tau)w_t}{c_t} &= \frac{1}{1-l_t} \\ \frac{c_{t+1}}{c_t} &= \beta(r_{t+1} - \delta + 1)\end{aligned}$$

4. a) Debido a que la productividad marginal del capital es decreciente, el capital crece a tasa decreciente si su nivel de capital es menor que el de estado estacionario. Por condiciones de INADA se puede asegurar que $\Delta k = 0$, es decir, existe un estado estacionario.
- b) Bajo el supuesto de competencia perfecta, se usan los insumos hasta que la productividad de la última unidad sea igual al precio de los factores.
- c) Firms maximizan, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial L} &= f(k) + \frac{\partial f(k)}{\partial L} L \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= f(k) + \frac{\partial f(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial L} L \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= f(k) - f'(k) \frac{K}{L} \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= f(k) - f'(k)k = w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial K} &= \frac{\partial f(k)}{\partial K} L \\ \frac{\partial F}{\partial K} &= f'(k) = r\end{aligned}$$

- d) Por retornos constantes a escala:

$$\begin{aligned}F(\lambda K, \lambda L) &= \lambda F(K, L) \\ \frac{\partial F(\lambda K, \lambda L)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \lambda F(K, L)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F(\lambda K, \lambda L)}{\partial(\lambda K)} \frac{\partial \lambda K}{\partial \lambda} + \frac{\partial F(\lambda K, \lambda L)}{\partial(\lambda L)} \frac{\partial \lambda L}{\partial \lambda} &= F(K, L)\end{aligned}$$

Evaluando en $\lambda = 1$

$$rK + wL = F(K, L) \quad (9)$$

- e) Para ver monotonicidad en los pagos de los factores basta derivar con respecto a k las expresiones encontradas en las partes anteriores, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial k} &= f''(k) < 0 \\ \frac{\partial w}{\partial k} &= -kf''(k) > 0\end{aligned}$$

f) Función de Producción Cobb-Douglas:

$$f(k) = k^\alpha$$

Entonces :

$$\frac{\dot{r}}{r} = (\alpha - 1) \frac{\dot{k}}{k} = \gamma_r$$

$$\frac{\dot{w}}{w} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} = \gamma_w$$

- g) En el contexto de este modelo, en la medida que nos acercamos al estado estacionario γ_k se hace cada vez más baja, esto implica que γ_r debería ser cada vez mayor, lo que concuerda con el enunciado ($\alpha < 1$).
- h) Este modelo predice que la tasa de crecimiento de los salarios es decreciente, porque:

$$\frac{\dot{w}}{w} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} = \gamma_w$$

con γ_k decreciente, es decir este modelo no concuerda con el enunciado. Este hecho se podría corregir incorporando aumentos en la productividad en la función de producción de las firmas.