

Estimación Puntual

22/08/05

Problema 1

Sean los valores muestrales X_1, X_2, \dots, X_n m.a.s de una v.a. X de función densidad:

$$f(x/\beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{-(x-a)}{\beta}\right)$$

$x \geq a$ con a conocido

1. Dé el estimador de los momentos $\hat{\beta}_1$ de β .
2. Dé el estimador de los máxima verosimilitud $\hat{\beta}_2$ de β .
3. Calcule la esperanza y varianza de $\hat{\beta}_2$.
4. Concluya si $\hat{\beta}_2$ es insesgado y consistente.
5. Utilizando la información de Fisher y la cota Crammer Rao, determine si $\hat{\beta}_2$ es eficiente.

Datos: $E(x) = \beta + a$ $Var(x) = \beta^2$

Solución

1. Ocupando ecuación de los momentos

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

$\forall k \in N$

Con $k=1$: $E(x) = \bar{x} \implies$ (de datos) $\beta + a = \bar{x}$

$\implies \hat{\beta}_1 = \bar{x} - a$

2.El estimador de máxima verosimilitud se obtiene resolviendo el problema:

$$\max_{\beta} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta)$$

Como las variables son independientes, luego:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i / \beta)$$

También utilizaremos la propiedad:

$$\max_{\beta} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta) \iff \max_{\beta} \ln(f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta))$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i / \beta) = \frac{1}{\beta^n} \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{-(x_i - a)}{\beta}\right)$$

\implies

$$\ln(f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta)) = -n \ln(\beta) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)}{\beta} \quad (1)$$

Derivando esta expresion e igualándola a 0:

$$-n$$

4. Como $E(\hat{\beta}_2) = \beta \implies$ que $\hat{\beta}_2$ es estimador insesgado

Esta propiedad junto a que $Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\beta^2}{n} \xrightarrow{\infty} 0$ hace que $\hat{\beta}_2$ sea un estimador consistente

5. La informacion de fisher $I_n(\beta)$ se puede obtener con tres fórmulas distintas:

$$E\left(\left(\frac{\partial \ln(f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta))}{\partial \beta}\right)^2\right) = Var\left(\frac{\partial \ln(f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta))}{\partial \beta}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln(f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta))}{\partial \beta^2}\right)$$

Calculando con segunda fórmula y derivando la expresion (1) obtenida en parte 2:

$$I_n(\beta) = Var\left(\frac{\partial \ln(f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \beta))}{\partial \beta}\right) = Var\left(-n \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)\right)$$

$$\frac{1}{\beta^4} \sum_{i=1}^n Var(x_i) = \frac{n}{\beta^2}$$

La cota de Crammer Rao indica que para cualquier estimador T de β :

$$Var(T) \geq \frac{\frac{\partial E(T)}{\partial \beta}}{I_n(\beta)}$$

Como $\hat{\beta}_2$ es insesgado tenemos que $\frac{\partial E(T)}{\partial \beta} = 1$

Para que sea eficiente el estimador debe cumplir la igualdad de la cota CR. En este caso $\hat{\beta}_2$ si lo es pues :

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\beta^2}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\beta^2}} = \frac{\frac{\partial E(T)}{\partial \beta}}{I_n(\beta)}$$

Problema 2

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a.s de probabilidad discreta de la forma: $P(X = x) = \frac{a_x \theta^x}{h(\theta)}$ con $x=0,1,2,\dots$ y en donde h es diferenciable y a_k no todos nulos

1. Dé las expresiones de $h(\theta)$ y $h'(\theta)$
2. Dé el estimador de máxima verosimilitud de θ en función de h y h'
3. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud es el mismo que el estimador por método de momentos
4. Aplique lo anterior para las siguientes distribuciones:

i. $X \rightarrow Binomial(N, p)$ (N conocido) ii. $X \rightarrow Poisson(\lambda)$

Solución

1. $h(\theta)$ se obtiene de la ecuación $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = 1$. De aquí obtengo que:

$$h(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x \theta^x \implies h'(\theta) = \sum_{x=1}^{\infty} x a_x \theta^{x-1}$$

2. Como cada uno de los X_i son independientes, el estimador se calcula resolviendo:

$$\max_{\theta} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n / \theta) = \max_{\theta} \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i / \theta)$$

$$\prod_{i=1}^n P(X_i = x_i / \theta) = \prod_{i=1}^n a_{x_i} \frac{1}{h(\theta)^n} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

Como $\prod_{i=1}^n a_{x_i}$ es una expresión no dependiente de θ luego puedo resolver:

$$\max_{\theta} \frac{1}{h(\theta)^n} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

Ocupando la propiedad del logaritmo: $\max_{\theta} -n \ln(h(\theta)) + \sum_{i=1}^n x_i \theta$

Derivando e igualando a 0, encontramos una ecuación implícita para nuestro estimador $\hat{\theta}$, la cual es:

$$\frac{\hat{\theta}h'(\hat{\theta})}{h(\hat{\theta})} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{X} \quad (2)$$

3. Por estimador de momentos: $E(X) = \bar{X} \Rightarrow$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x a_x \theta^x}{h(\theta)} = \frac{\theta}{h(\theta)} \sum_{x=1}^{\infty} x a_x \theta^{x-1} = \bar{X}$$

De 1. tenemos que $\sum_{x=1}^{\infty} x a_x \theta^{x-1} = h'(\theta)$. Entonces se llega a:

$$\frac{\hat{\theta}h'(\hat{\theta})}{h(\hat{\theta})} = \bar{X}$$

4.i. Una binomial tiene una distribución:

$$P(X = x) = C_x^N a_x p^x (1-p)^{N-x} = C_x^N a_x \frac{p}{1-p}^x \frac{1}{(1-p)^N}$$

Escribamos esta distribución de la forma $\frac{a_x \theta^x}{h(\theta)}$

$$\blacksquare a_x = C_x^N \text{ (No depende de } \theta \text{)}$$

$$\blacksquare \theta = \frac{p}{1-p}$$

$$\blacksquare h(\theta) = \frac{1}{(1-p)^N}$$

$$\theta = \frac{p}{1-p} \Rightarrow p = \frac{\theta}{1+\theta} \Rightarrow h(\theta) = (1+\theta)^N$$

Luego ocupando la expresión implícita (2) para el estimador :

$$\frac{\hat{\theta}h'(\hat{\theta})}{h(\hat{\theta})} = \frac{\hat{\theta}N(1+\hat{\theta})^{N-1}}{(1+\hat{\theta})^N} = \bar{X} \Rightarrow$$

$$\frac{N\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}} = \bar{X} \text{ y tenemos que } p = \frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}}$$

Luego nuestro estimador para p es: $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{N}$

ii. Para una Poisson queda propuesto

Cualquier duda o consulta: lreus@ing.uchile.cl