

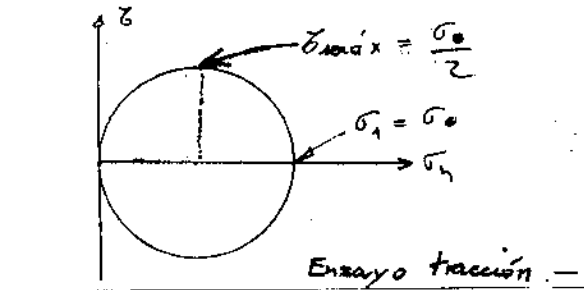
CRITERIOS DE FALLA PARA MATERIALES

Los criterios de fluencia permiten decidir en qué momento un punto de un material entra en fluencia cuando está sometido a estados complejos de esfuerzos. Mencionaremos dos criterios

Criterio de máximo esfuerzo de corte o de Tresca Este criterio indica que la fluencia en un punto comienza cuando el máximo esfuerzo de corte τ_{max} alcanza un valor crítico τ_{crit} . Es decir,

$$\tau_{max} = \tau_{crit}$$

El esfuerzo τ_{crit} es el esfuerzo de corte que hay en el momento de la fluencia del ensayo de tracción, cuando el esfuerzo normal es σ_0 . En consecuencia, este valor crítico es $\sigma_0/2$, como se aprecia al dibujar el círculo de Mohr



$$\tau_{crit} = \frac{\sigma_0}{2}$$

En una situación de seguridad debe verificarse $\tau_{max} < \frac{\sigma_0}{2}$

O si se introduce un coeficiente de seguridad N

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2N} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (\text{Si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$$

En el caso bidimensional, supongamos $\sigma_3 = 0$ y grafiquemos el criterio en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$. Para cada cuadrante la situación es distinta. Por ejemplo

a) $\sigma_1 > \sigma_2 > 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$

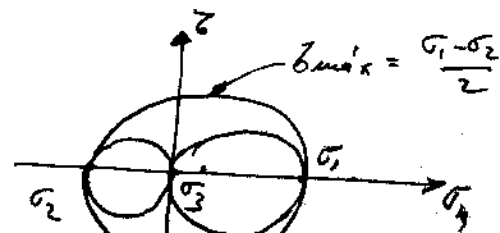
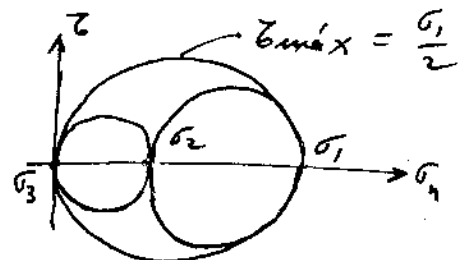
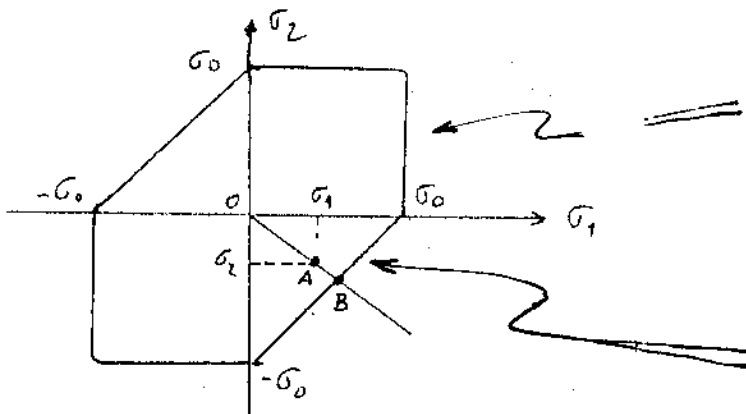
$\therefore \sigma_1 = \sigma_0$ Línea vertical por $\sigma_1 = \sigma_0$

b) $\sigma_2 > \sigma_1 > 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$

$\therefore \sigma_2 = \sigma_0$ Línea horizontal por $\sigma_2 = \sigma_0$

c) $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$ Línea oblicua

Y así sucesivamente. El gráfico que se obtiene es



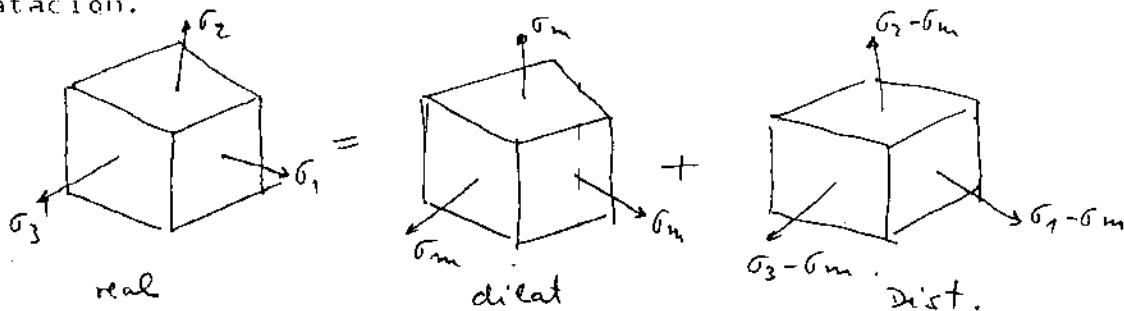
Este gráfico depende sólo del material. Para materiales con σ_0 mayor, el hexágono es más grande. Cuando un cuerpo se somete a cargas, se calculan los esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$, etc. en un punto crítico. Luego se calculan los esfuerzos principales, que corresponden a un punto del plano $\sigma_1 - \sigma_2$. Supongamos que este punto sea A; la falla se produce en B. El coeficiente de seguridad es entonces

$$N = OB/OA$$

Criterio de fluencia de von Mises o de Máx. Energía Distorsión

Este criterio dice que un punto entra en fluencia cuando la energía de distorsión U_{dist} alcanza un valor crítico U_{crit}

Todo estado de esfuerzos puede descomponerse en un estado de dilatación, donde el esfuerzo en cualquier dirección es el esfuerzo medio, más un estado de distorsión, que corresponde a la diferencia entre la situación real y el estado de dilatación.



A cada estado hay asociada una densidad de energía de deformación.

$$U = U_{dist} + U_{dilat}.$$

La energía total es, en un sistema de coordenadas paralelo a las direcciones principales es

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

Utilizando la ley de Hooke queda

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)$$

La energía asociada al estado de dilatación se encuentra considerando

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$$

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$$

La energía de dilatación entonces se escribe

$$U_{dilat} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_m^2$$

La energía de distorsión es

$$U_{dist} = U - U_{dilat}$$

$$= \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

$$\text{Nota: } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

La energía de distorsión crítica se obtiene tomando

$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Se obtiene

$$U_{crit} = \frac{\sigma_0^2}{16G}$$

Luego el criterio de fluencia es

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_0^2$$

En una situación de seguridad

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2 \sigma_0^2$$

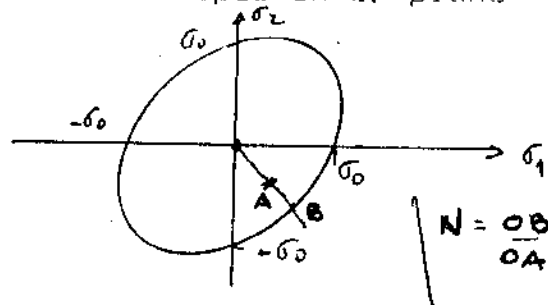
Introduciendo el coeficiente de seguridad queda

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \left(\frac{\sigma_0}{N} \right)^2$$

En el caso bidimensional obtenemos

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad \text{Seguridad: } \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \left(\frac{\sigma_0}{N} \right)^2$$

que corresponde a una elipse en el plano



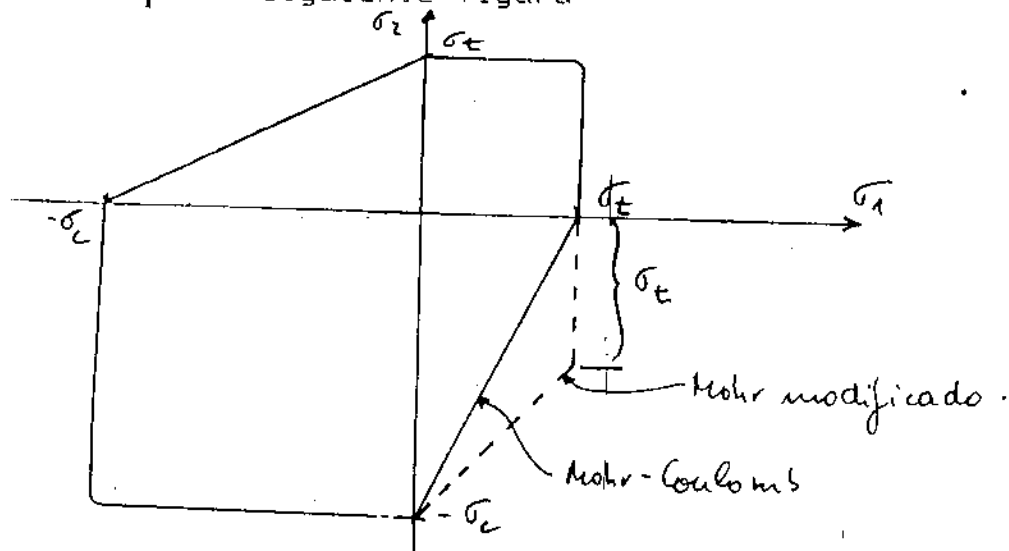
CRITERIOS DE FALLA PARA MATERIALES FRAGILES

En materiales frágiles es preferible trabajar con la resistencia al tracción y la resistencia a la compresión

Mencionaremos dos criterios.

Criterio de Mohr-Coulomb. Este criterio corresponde al criterio de Tresca para materiales dúctiles pero utilizando σ_t y σ_c en lugar de σ_0 .

Criterio de Mohr modificado. Es el criterio de Mohr-Coulomb, pero donde la línea vertical del primer cuadrante se alarga hacia el cuarto cuadrante en σ_t . Estos criterios se ilustran en la siguiente figura



Ejemplo 1 Las tensiones en un punto de un cuerpo son $\sigma_x = 910 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_y = 210 \text{ kg/cm}^2$ y $\tau_{xy} = 840 \text{ kg/cm}^2$. El ensayo del material da $\sigma_0 = 2800 \text{ kg/cm}^2$.
a) Determinar el coeficiente de seguridad por la teoría de rotura por cortadura máxima.

b) Determinar el coeficiente de seguridad por la teoría de *von Mises*.

Solución.

a) Por el círculo de Mohr o las ecuaciones de tensiones combinadas, se obtienen los siguientes valores para las tensiones principales σ_1 y σ_2 .

$$\sigma_1 = 1470 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_2 = -350 \text{ kg/cm}^2$$

El plano de cortadura más débil es aquel en el que tanto σ_1 como σ_2 contribuyen a la tensión cortante

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} [1470 - (-350)] = 910 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{adm} = 0,5 \times 2800 = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

$$N = \frac{1400}{910} = 1,54$$

b)

$$\frac{\sigma_0}{N} = \sqrt{1470^2 + (-350)^2} = 1470 \times (-350) = 1673 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto, $N = \frac{2800}{1673} = 1,67$

Ejemplo 2 El mismo cuerpo empleado en el ejemplo 1 está sometido a tensiones

$$\sigma_x = 1400 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_y = 280 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad \tau_{xy} = 420 \text{ kg/cm}^2$$

a) Determinar el coeficiente de seguridad por la teoría de rotura por cortadura máxima.

b) Determinar el coeficiente de seguridad por la teoría de *von Mises*.

Solución.

a) Las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = 1540 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_2 = 140 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{max} = 0,5 \times 1540 = 770 \text{ kg/cm}^2$$

$$= \frac{1400}{770} = 1,82$$

b)

$$\frac{\sigma_0}{N} = \sqrt{1540^2 + 140^2} = 1540 \times 140 = 1475 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto, $N = \frac{2800}{1475} = 1,90$

Ejemplo 3 Un eje de 5 cm de diámetro está cargado estáticamente por torsión pura con una torsión cortante de 700 kg/cm^2 . Encontrar el coeficiente de seguridad si el material es acero laminado en caliente A140. Emplear la teoría de *von Mises*.

Solución.

$$\tau_{max} = \sigma_1 = -\sigma_2 = 700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\left(\frac{\sigma_0}{N}\right)^2 = 700^2 + 700^2 = 700 \times (-700)$$

$$= 700 \sqrt{3} = 1212 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto, $\sigma_0 = 4400 \text{ kg/cm}^2$

$$N = \frac{4400}{1212} = 3,63$$

Ejemplo 4 Se diseñó un pasador pequeño de 6 mm de diámetro de hierro colado ASTM No. 40, para resistir una carga axial de compresión de 3.5 kN combinada con una torsional de 9.8 N·m, aplicando los factores de seguridad por carga. Calcúlese el factor de resistencia de seguridad por resistencia.

Solución Se utilizará primero el método gráfico. El esfuerzo axial de compresión es

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = - \frac{4(3.5)(10)^3}{\pi(6)^2} = -124 \text{ MPa}$$

El esfuerzo cortante por torsión es

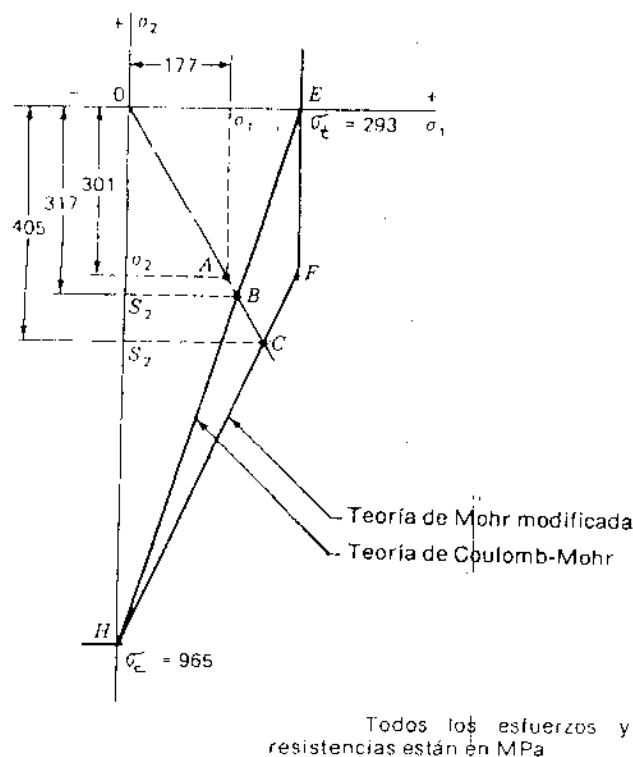
$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(9.8)(10)^3}{\pi(6)^3} = 231 \text{ MPa}$$

Cuando se traza el diagrama del círculo de Mohr, los esfuerzos principales resultan $\sigma_1 = 177 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = 0$ y $\sigma_2 = -301 \text{ MPa}$.

Si se emplean los valores típicos de las resistencias,

$$\sigma_t = 293 \text{ MPa y } \sigma_c = 965 \text{ MPa.}$$

El siguiente paso es trazar una gráfica a escala, correspondiente al cuarto cuadrante de la figura , utilizando las magnitudes de esfuerzo y resistencia que se han obtenido. Esto se efectúa en la figura . El punto *A* corresponde a las coordenadas σ_1, σ_2 del estado de esfuerzo real. Si σ_1 y σ_2 aumentan de magnitud pero conservan la misma relación entre sí, entonces los puntos *B* y *C* representarían las fallas según cada teoría. Por tanto, si *OA* representa el estado de esfuerzo, entonces *AB* y *AC* representan los márgenes de seguridad respectivos. Los correspondientes factores de seguridad son iguales, respectivamente, a *OB* dividido entre *OA*; a *OC*, entre *OA*;



Otra forma de obtener el factor de seguridad es proyectar los puntos *B* y *C* sobre el eje σ_1 o el σ_2 . Las intersecciones resultantes definen las resistencias correspondientes S_1 o S_2 si se utiliza una notación mnemotécnica. Por lo tanto, en la figura se puede leer la resistencia S_2 para cada teoría de falla.

Para la teoría de Mohr modificada se obtiene

$$n_s = \frac{-S}{\sigma} = \frac{-405}{-301} = 1.35$$

El resultado por la teoría de Coulomb-Mohr es

$$n_s = \frac{-S}{\sigma} = \frac{-317}{-301} = 1.05$$

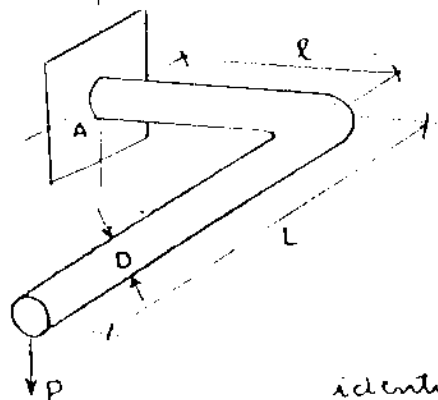
Ejemplo 5

Para el siguiente sistema de cargas combinadas, se pide determinar el diámetro del eje, dimensionándolo por el criterio:

(i) Tercera

(ii) Von Mises

DATOS $P, \sigma_d, N, L = \sqrt{3} \ell$



SOLUCION

En el punto A tenemos:

torsión $T = PL$

flexión $M = Pl$

y según las fórmulas:

$$\tau = \frac{16T}{\pi D^3}, \quad \sigma = \frac{32M}{\pi D^3}$$

identificamos $\sigma \equiv \sigma_x, \tau \equiv \tau_{xy}$

$$\text{luego, } \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

reemplazando:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{16}{\pi D^3} \left[M \pm \sqrt{M^2 + T^2} \right]$$

dado que $M = Pl, T = PL, \text{ y } L = \sqrt{3} \ell$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{16P}{\pi D^3} \left[\ell \pm 2\ell \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{48P\ell}{\pi D^3} \\ \sigma_2 = -\frac{16P\ell}{\pi D^3} \end{array} \right.$$

(i) crit Tercera: $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \frac{\sigma_d}{N}$

$$\Rightarrow \frac{64P\ell}{\pi D^3} \leq \frac{\sigma_d}{N} \Rightarrow D = \left(\frac{64N P \ell}{\pi \sigma_d} \right)^{1/3}$$

(ii) crit Von Mises:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \leq \left(\frac{\sigma_d}{N} \right)^2$$

$$\left(\frac{P\ell}{\pi D^3} \right)^2 \left\{ 48^2 + 16 \cdot 48 + 16^2 \right\} \leq \frac{\sigma_d^2}{N^2}$$

$$57,69 \frac{P\ell}{\pi D^3} \leq \frac{\sigma_d}{N}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{57,69 N P \ell}{\pi \sigma_d} \right)^{1/3}$$

$$k = \sqrt{P/EI},$$

$$P = \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 EI, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

opportunity for the rod to buckle is when $n = 1$; thus the critical load

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (2-48)^\dagger$$

the $k = \pi/2L$, the deflection curve of the rod is

$$y_c = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (2-49)$$

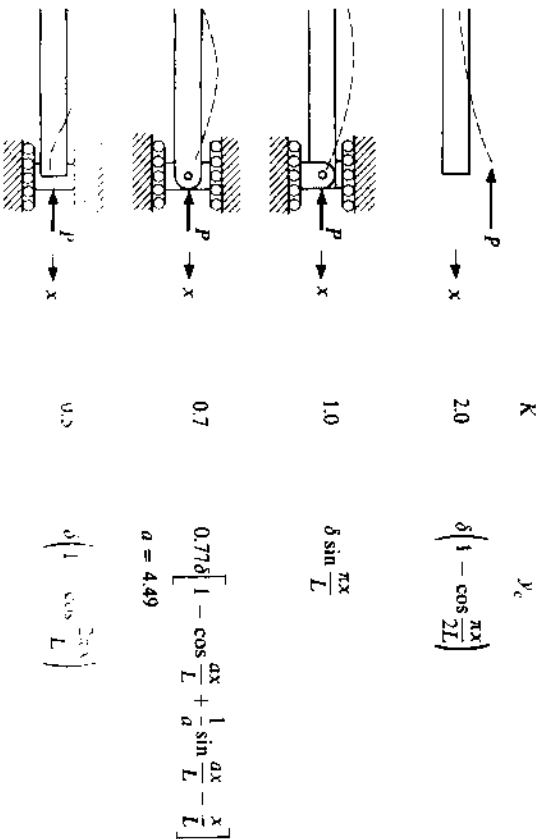
if, no additional information can be found from linear theory, and the δ cannot be determined.

critical load depends on the geometric end conditions of the rod. ns (2-48) and (2-49) can be written for various end conditions using Eq. and Table 2-1, where

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (2-50)$$

q. (2-50), for a given material the critical load is dependent on the length nent of inertia of the cross section about the z axis, as illustrated in Fig. There is an upper bound on P_{cr} , which is based on either the yield

1



critical force for buckling is often referred to as the *Euler force*.

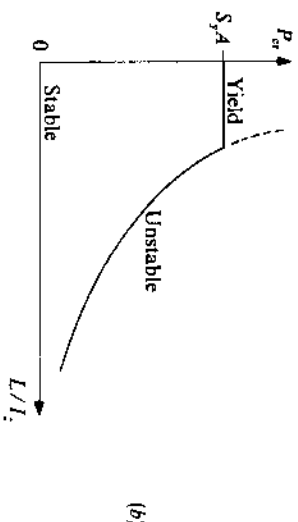
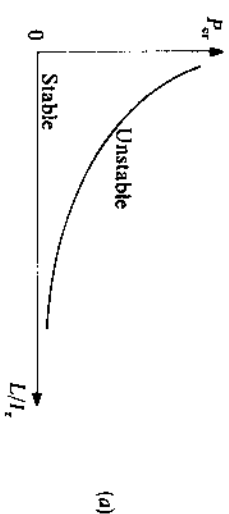


Figure 2-53

strength or ultimate strength under pure compression. If the failure criterion is based on the yield strength S_y , the upper bound for P_{cr} will be $S_y A$, where A is the area of the cross section of the rod (see Fig. 2-53b).

There are a number of design equations available which reduce these limits for safety purposes, e.g., the secant formula, Johnson's equations, Rankine's equation, as well as various code equations. Most elementary strength of materials textbooks list these equations, which the reader is urged to review.

Example 2-18 A column is fixed at one end and is only allowed to bend in the xy plane (see Fig. 2-54a). The bending rigidity of the beam is EI_x . A spring of spring constant k , lb/in is attached to the other end. Determine the critical load P_{cr} for buckling if $EI_x = 10^9$ lb·in², $L = 30$ in, and $k_x = 1000$ lb/in. Neglect the weight of the beam.

SOLUTION The bending moment for any position x (see Fig. 2-54b) is given by

$$M_x = P_c(\delta - y) - k_x \delta(L - x) \quad (a)$$

Since $M_x = EI_x d^2 y / dx^2$, Eq. (a) reduces to

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1^2 y = (k_1^2 - k_2 L) \delta + k_2 x \delta \quad (b)$$

$$\text{where } k_1 = \sqrt{\frac{P_c}{EI_x}} \quad \text{and} \quad k_2 = \frac{k_x}{EI_x}$$

EXAMPLES

2-1 The axially loaded composite bar shown in Fig. 2-55 has a rectangular cross section. Assume that the stress in each section is uniform. If the thickness of the material of bonded materials 1 and 2 are E_1 and E_2 , respectively, determine (a) the value of ϵ such that the force F causes uniform stress in each member and (b) the value of ϵ such that the force F causes uniform stress in each member. Consider $E_1 > E_2$.

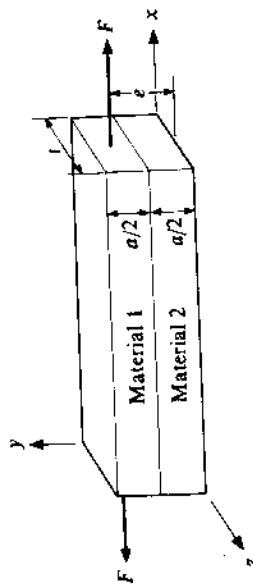


Figure 2-55

2-2 A circular steel rod of length L rotates with a constant angular velocity ω in a horizontal plane about an axis through its midpoint, as shown in Fig. 2-56. The weight density is 0.284 lb/in^3 . If $d = 1.0 \text{ in}$, $L = 20 \text{ in}$, $E = 29 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$, and $\omega = 52 \text{ rad/s}$, determine (a) the maximum normal stress, $(\sigma_x)_{\max}$; (b) the increase in stress σ_x as a function of x ; (c) the maximum normal stress, $(\sigma_x)_{\max}$; (d) the increase in stress σ_x as a function of x ; (e) the maximum normal stress, $(\sigma_x)_{\max}$; (f) the increase in stress σ_x as a function of x ; (g) the maximum normal stress, $(\sigma_x)_{\max}$; (h) the increase in stress σ_x as a function of x . Hint: First, prove that the internal axial force at any position x is $(\rho/2g)\omega^2 A(L^2 - x^2)$, where A is the cross-sectional area in square inches and g is constant in inches per second per second.



Figure 2-56

2-3 In Fig. 2-55 consider that the top material is aluminum ($E_a = 10 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$) and the bottom material is steel ($E_s = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$). If $a = 8 \text{ in}$, $t = \frac{1}{2} \text{ in}$, and the normal strain is ϵ given by $\epsilon_s = 100 \mu\text{in/in}$, determine the magnitude and location of the load F .
2-4 A rigid bar AC is hinged to a vertical wall and supported by steel cable BD , as shown in Fig. 2-57. Determine the maximum allowable value of the applied load P such that the cable does not exceed 70 MN/m^2 . The cross-sectional area of the cable is A_c . Determine the resulting vertical deflection of point C due to P . The modulus of elasticity of the cable material is $20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.

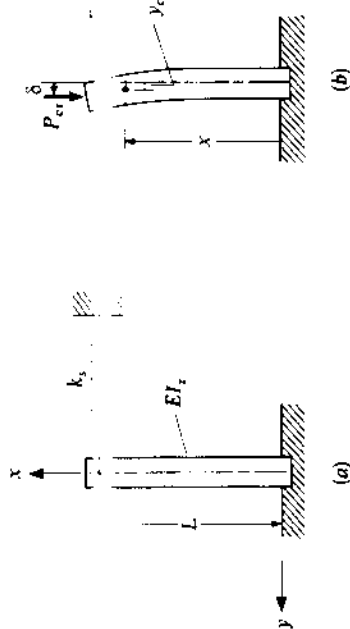


Figure 2-54

The solution of the differential equation (b) is

$$y_c = C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x + \frac{(k_1^2 - k_2^2 L) \delta}{k_1^2} + \frac{k_2 x \delta}{k_1^2} \quad (c)$$

Equation (c) is subjected to the boundary condition that $y_c = dy_c/dx = 0$ at $x = 0$. After rearranging, this results in

$$C_2 = -\left(1 - \frac{k_2^2 L}{k_1^2}\right) \delta \quad (d)$$

$$C_1 = -\frac{k_2}{k_1^2} \delta \quad (e)$$

Substitution back into Eq. (c) yields

$$y_c = \frac{k_2}{k_1^2} \delta \left(k_1 x - \sin k_1 x \right) + \delta \left(1 - \frac{k_2^2 L}{k_1^2} \right) (1 - \cos k_1 x) \quad (f)$$

For buckling, $y_c = \delta$ at $x = L$. Thus from Eq. (f),

$$\delta = \frac{k_2}{k_1^2} \delta (k_1 L - \sin k_1 L) + \delta \left(1 - \frac{k_2^2 L}{k_1^2} \right) (1 - \cos k_1 L) \quad (g)$$

which can be shown to reduce to

$$\tan k_1 L = k_1 L \left[1 - \frac{(k_1 L)^2}{k_2 L^3} \right] \quad (h)$$

provided $k_1 L \neq 0$.

Since $L = 30$ and

$$k_2 = \frac{k_1}{EI_c} = \frac{100}{10^3} = 10^{-3}$$

Eq. (g) becomes

$$\tan k_1 L = k_1 L \left[1 - \frac{(k_1 L)^2}{27} \right] \quad (h)$$

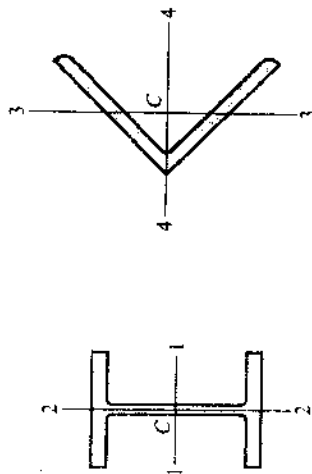
The lowest nonzero value of $k_1 L$ which satisfies Eq. (h) is $k_1 L = 4.13$. Since $k_1 L = L \sqrt{P_c/EI_c}$,

$$P_c = \left(\frac{k_1 L}{L} \right)^2 EI_c = \left(\frac{4.13}{30} \right)^2 10^3 = 1900 \text{ lb}$$

1/800 de la longitud. La carga axial sobre la barra es $P = 20 \text{ k}$ y $E = 10 \times 10^3 \text{ ksi}$. (a) Determinar el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra. (b) Determinar el factor de seguridad n con respecto a la fluencia si $\sigma_y = 40 \text{ ksi}$.

11.6-3 Una barra circular sólida de acero ($E = 200 \text{ GPa}$) tiene un diámetro $d = 40 \text{ mm}$ y una longitud $L = 0.8 \text{ m}$. La barra está articulada en los extremos y se supone que tiene una deflexión inicial en el punto medio igual a $1/500$ de la longitud. La carga axial sobre la barra es $P = 100 \text{ kN}$. (a) Calcular el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra. (b) Calcular la carga máxima permisible P_{perm} si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$ y $\sigma_y = 290 \text{ MPa}$.

11.6-4 Una columna de acero con sección $W 10 \times 45$ ($E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$) con extremos articulados y longitud $L = 15 \text{ pie}$ soporta una carga axial $P = 150 \text{ k}$. La columna está apoyada sólo en los extremos, por lo que se pandea por flexión respecto al eje 2-2 (véase figura). Suponer que la columna tiene una deflexión inicial en el punto medio igual a $1/900$ de su longitud ($L/a = 900$). (a) Determinar el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra. (b) Determinar el factor de seguridad n con respecto a la fluencia si $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.



Probs. 11.6-4 y 11.6-5 Prob. 11.6-6

11.6-5 Una columna de acero ($E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$) con sección $W 8 \times 35$ de extremos articulados y longitud $L = 12 \text{ pie}$ soporta una carga axial $P = 100 \text{ k}$. La columna está apoyada sólo en los extremos de modo que se pandea por flexión respecto al eje 2-2 (véase figura). Suponer que la columna tiene una deflexión inicial en el punto medio de 0.3 plg . (a) ¿Cuál es el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra? (b) ¿Cuál es el factor de seguridad n con respecto a la fluencia si $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$?

11.6-6 Una sección angular $L 3 \times 3 \times 1/4$ se usa como miembro de compresión con extremos articulados (véase figura). Está soportada sólo en los extremos de modo que el pandeo ocurre por flexión respecto al eje 3-3. Los datos para la sección angular son los siguientes: $L = 4 \text{ pie}$, $E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$. Suponer que la deflexión inicial en el punto medio del ángulo es $1/800$ de la longitud. Calcular la carga axial permisible P_{perm} si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$.

Los problemas de la Sección 11.9 deben resolverse suponiendo que las cargas axiales se aplican centralmente en los extremos de la columna. Las columnas están soportadas únicamente en sus extremos y pueden pandearse en cualquier dirección.

11.9-1 Determinar la carga axial permisible P para una columna de patín ancho $W 10 \times 45$ de acero con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 8 \text{ pie}$, 16 pie , 24 pie y 32 pie . (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-2 Determinar la carga axial permisible P para una columna de acero de patín ancho $W 10 \times 60$ con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 10 \text{ pie}$, 20 pie , 30 pie y 40 pie . (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-3 Calcular la carga axial permisible P para una columna de acero de patín ancho $W 12 \times 50$ con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 8 \text{ pie}$, 16 pie , 24 pie y 32 pie . (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 50 \text{ ksi}$.)

11.9-4 Calcular la carga axial permisible P para una columna de acero de patín ancho $W 12 \times 87$ con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 10 \text{ pie}$, 20 pie , 30 pie y 40 pie . (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 50 \text{ ksi}$.)

11.9-5 Determinar la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados que tiene un diámetro exterior de 4.5 plg y un espesor de pared de 0.237 plg para cada una de las siguientes longitudes: $L = 6 \text{ pie}$, 12 pie , 18 pie y 24 pie . (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-6 Determinar la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados que tiene un diámetro exterior de 4.5 plg y un espesor de pared de 0.237 plg para cada una de las siguientes longitudes: $L = 6 \text{ pie}$, 12 pie , 18 pie y 24 pie . (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-7 Calcular la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados cuyo diámetro exterior es 140 mm y su espesor de pared 7 mm para cada una de las siguientes longitudes: $L = 2 \text{ m}$, 4 m , 6 m y 8 m . (Suponer $E = 200 \text{ GPa}$ y $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$.)

11.9-8 Calcular la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados con diámetro exterior de 220 mm y espesor de pared de 12 mm para cada una de las siguientes longitudes: $L = 2.5 \text{ m}$, 5 m , 7.5 m y 10 m . (Suponer $E = 200 \text{ GPa}$ y $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$.)

11.9-9 Una columna tubular de acero con extremos articulados soporta una carga axial $P = 21 \text{ k}$. Los diámetros exterior e interior del tubo son 3.5 plg y 2.9 plg , respectivamente. ¿Cuál es la mayor longitud permisible L de la columna si $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$?

11.9-10 Una columna de acero de patín ancho $W 8 \times 28$ con extremos articulados soporta una carga axial P . ¿Cuál es la mayor longitud permisible L de la columna si $P = 50 \text{ k}$ y $P = 100 \text{ k}$? (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-11 Una columna de acero de patín ancho $W 8 \times 35$ con extremos articulados soporta una carga axial P . ¿Cuál es la mayor longitud permisible L de la columna si $P = 75 \text{ k}$ y si $P = 150 \text{ k}$? (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-12 ¿Cuál es el menor diámetro permisible d de una columna sólida de acero de sección transversal circular con extremos articulados y longitud 2 m si debe soportar una carga axial $P = 800 \text{ kN}$? (Suponer $E = 200 \text{ GPa}$ y $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$.)

11.9-13 ¿Cuál es el menor ancho permisible b de una columna sólida de acero de sección transversal cuadrada con extremos articulados y longitud $L = 1.5 \text{ m}$ si debe soportar una carga axial $P = 250 \text{ kN}$? (Suponer $E = 200 \text{ GPa}$ y $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$.)

11.9-14 Determinar la carga axial permisible P para una columna tubular de aluminio (aleación 2014-

T6) con extremos articulados y longitud $L = 10 \text{ pie}$. La columna tiene un diámetro exterior de 4 plg y un diámetro interior de 3 plg . (a) Calcular la carga axial permisible P . (b) Calcular la carga axial permisible P si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$ y $\sigma_y = 40 \text{ ksi}$.

11.9-15 Resolver e tubo de aluminio con plg y un diámetro interior plg . (a) Calcular la carga axial permisible P . (b) Calcular la carga axial permisible P si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$ y $\sigma_y = 290 \text{ MPa}$.

11.9-16 Una barra de 2 plg está cargada a compresión por una carga axial P . La barra tiene extremos articulados y longitud $L = 10 \text{ pie}$. (a) Calcular la carga axial permisible P . (b) Calcular la carga axial permisible P si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.

11.9-17 ¿Cuál es el diámetro exterior de una columna sólida de aluminio con extremos articulados y longitud $L = 10 \text{ pie}$ si debe soportar una carga axial $P = 150 \text{ kN}$? (Suponer $E = 70 \text{ GPa}$ y $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$.)

11.9-18 Determinar la carga axial permisible P para una columna de acero de patín ancho $W 10 \times 45$ de acero con extremos articulados y longitud $L = 15 \text{ pie}$. (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-19 Determinar la carga axial permisible P para una columna de acero de patín ancho $W 10 \times 60$ de acero con extremos articulados y longitud $L = 15 \text{ pie}$. (Suponer $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.)

11.9-20 Una columna de acero de patín ancho $W 12 \times 50$ de acero con extremos articulados y longitud $L = 15 \text{ pie}$ soporta una carga axial $P = 100 \text{ k}$. (a) Calcular la carga axial permisible P . (b) Calcular la carga axial permisible P si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$ y $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$.

11.9-21 ¿Cuál es el diámetro exterior de una columna cuadrada con extremos articulados y longitud $L = 10 \text{ pie}$ si debe soportar una carga axial $P = 150 \text{ kN}$? (Suponer $E = 70 \text{ GPa}$ y $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$.)

plazamiento y_{\max} crece con gran rapidez. Esto explica los inconvenientes que surgieron, al resolver el problema, suponiendo que los desplazamientos eran pequeños.

Comparando los resultados obtenidos nos convencemos de que el comportamiento del sistema en la zona supercrítica se puede estudiar solamente mediante las ecuaciones que describen las particularidades de los desplazamientos grandes. En lo que se refiere a la determinación de las propias fuerzas críticas, para este fin son suficientes las ecuaciones lineales comunes que se plantean para el caso de flechas pequeñas. Por eso, en adelante podemos con certeza determinar las fuerzas críticas por las fórmulas simplificadas sin recurrir al aparato complicado de las ecuaciones no lineales.

§ 92. Dependencia entre la fuerza crítica y las condiciones de apoyo de la barra

Cuando se trata de desplazamientos pequeños de la barra articulada en sus extremos, la flexión de ésta durante el pandeo ocurre según una semionda de senoide, resultando para la fuerza crítica,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Aprovechando las particularidades de la línea elástica, resulta posible, con relativa facilidad, extender la solución obtenida a otros casos de apoyo de la barra. Así, por ejemplo, si la barra se empotra en un extremo y está libre en el otro (fig. 492), entonces la línea elástica de la barra podrá ser transformada en la línea elástica de una barra articulada, situando un espejo en el empotramiento. Es obvio que la fuerza crítica correspondiente a la barra de longitud l empotrada en un extremo será igual a la carga crítica correspondiente a una barra articulada de longitud $2l$.

Es decir, que en este caso,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}.$$

La barra articulada que tiene un apoyo en el medio del vano (fig. 493), al perder la estabilidad, se flexiona según dos semiondas. Es decir, cada una de sus semiondas pierde la estabilidad de la misma forma que una barra articulada de longitud $l/2$. Por lo tanto,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Generalizando las fórmulas obtenidas se puede hallar la expresión general de la fuerza crítica para la barra comprimida como sigue,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (14.17)$$

siendo μ , el coeficiente que se denomina *coeficiente de reducción de la longitud*. Este número indica cuantas veces se debe aumentar la

Tabla 11

m	0	0,087	0,173	0,259	0,342	0,423	0,500	0,574	0,643	0,707
$\frac{kl}{2}$	1,571	1,574	1,583	1,598	1,620	1,649	1,686	1,731	1,787	1,854
$\frac{P}{P_{\text{crit}}} = \left(\frac{kl}{2}\right)^2 \frac{4}{\pi^2}$	1	1,004	1,015	1,035	1,064	1,102	1,152	1,215	1,294	1,393
$\frac{y_{\max}}{l} = m; \frac{kl}{2} = m; \frac{kl}{2}$	0	0,055	0,110	0,162	0,211	0,257	0,297	0,331	0,360	0,381

En el primer renglón de esta tabla figuran algunos valores del parámetro m , escogidos de manera tal que $\arcsen m = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots$. Esto resulta muy cómodo puesto que las integrales elípticas en la mayoría de los casos se dan en función del ángulo $\arcsen m$ y no en función del propio m .

El segundo renglón de la tabla contiene los valores de la integral elíptica. El tercer renglón de las tablas de las funciones especiales. Según la expresión (14.14) esta integral es $\frac{2}{\pi}$. En el tercer renglón figura la razón $\frac{P}{P_{\text{crit}}}$ que se obtiene según las notaciones (14.3) y (14.7). Por último, el cuarto renglón de la tabla

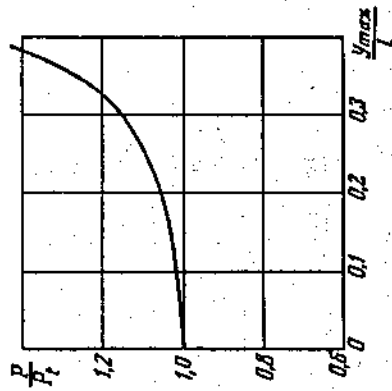


Fig. 491.

contiene la flecha y_{\max} que se obtiene por la fórmula (14.16). En la figura 491 se da la curva

$$\frac{P}{P_{\text{crit}}} = f\left(\frac{y_{\max}}{l}\right)$$

construida sobre la base de estos cálculos.

Entre la fuerza que actúa y las flechas se establece pues una relación bien determinada. A cada valor de la fuerza P le corresponde su flecha y_{\max} . Observamos, al mismo tiempo, que cuando la fuerza es mayor que la crítica, el des-

longitud de la barra articulada para que su carga crítica sea igual a la correspondiente a la barra de longitud l con las condiciones de apoyo establecidas. En el caso de la barra empotrada en un extremo y libre en el otro $\mu=2$. En el caso de la barra de la figura 493, $\mu=\frac{1}{2}$.

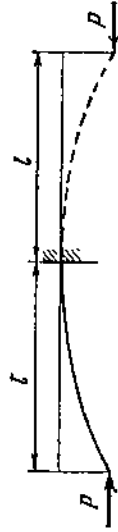


Fig. 492.

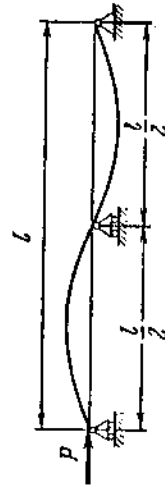


Fig. 493.

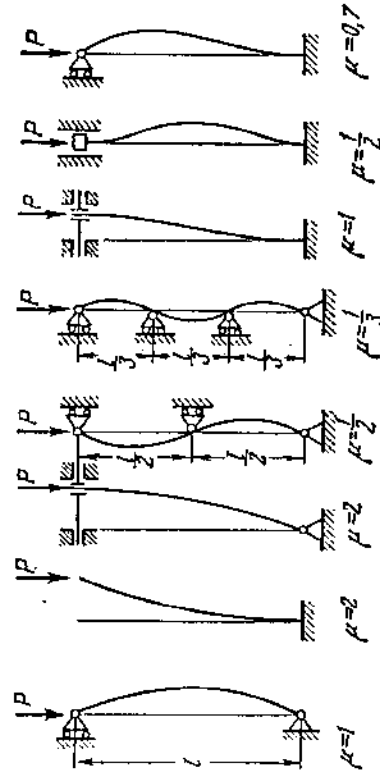


Fig. 494.

En la figura 494 están representados algunos tipos de empotramiento de la barra, así como también los valores correspondientes del coeficiente de reducción de la longitud μ . En todos los casos, excluyendo el último, el valor de μ se determina con la simple comparación de la línea elástica de la barra flexionada con la longitud de la semionda de la sinusoide correspondiente al caso de los apoyos articulados.

El último de los casos representados en la figura 494 se debe analizar aparte. En este caso, la línea elástica tiene dos puntos donde la

curvatura es nula: el punto A y el punto B (fig. 495). A diferencia de los otros casos, estos puntos no se encuentran sobre una recta paralela a la línea de acción de la fuerza P. Por lo tanto, aquí aparece la fuerza cortante R (fig. 495) que, en los casos de apoyo analizados anteriormente, no figuraba.

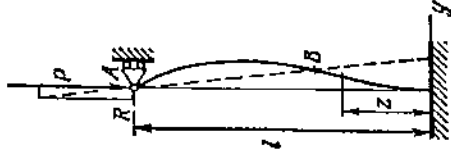


Fig. 495.

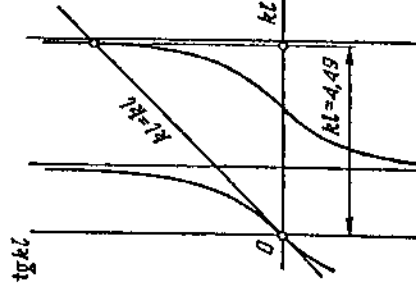


Fig. 496.

Planteamos la ecuación diferencial de la línea elástica de la barra flexionada. Está claro que,

$$EI y'' = -Py + R(l-z),$$

o sea,

$$y'' + k^2 y = \frac{R}{EI}(l-z),$$

de donde se obtiene,

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \frac{R}{EI k^2} (l-z).$$

Las constantes C_1 , C_2 y R se deben escoger de manera tal que se cumplan las siguientes condiciones de borde: cuando $z=0$, $y=0$ e $y'=0$, y cuando $z=l$ $y=0$. Escribimos las tres ecuaciones correspondientes a estas condiciones,

$$C_2 + \frac{Rl}{EI k^2} = 0, \quad C_1 k - \frac{R}{EI k^2} = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

Existen ahora dos posibilidades.

1) El sistema tiene la solución $C_1=C_2=0$, $R=0$. Entonces $y=0$ y la barra permanecerá recta. Este caso no nos interesa.

2) Las constantes C_1 , C_2 y R no son todas iguales a cero y, como resultado, la barra recibe desplazamientos transversales.

El sistema de ecuaciones homogéneas tiene solución que no es nula solamente en el caso cuando su determinante es igual a cero. Es decir, la condición necesaria para que la barra se flexione será,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{l}{EI k^2} \\ k & 0 & -\frac{1}{EI k^2} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se obtiene,

$$\operatorname{tg} kl = kl. \quad (14.18)$$

Esta ecuación transcendental deberá ser resuelta con respecto a kl . La manera más fácil de resolverla es la forma gráfica, precisando después la solución por tanteos con las tablas de las funciones trigonométricas.

Representamos el gráfico de la función $\operatorname{tg} kl = f(kl)$ y la recta $kl = kl$ (fig. 496). Las abscisas de los puntos de intersección nos proporcionan las raíces de la ecuación en cuestión. La raíz mínima diferente de cero será,

$$kl = \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 4.49.$$

Entonces,

$$P_{\text{crit}} = \frac{4.49^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}.$$

Así pues, $\mu \approx 0.7$.

Para terminar, veamos algunos ejemplos más complicados de determinación de las fuerzas críticas.

Ejemplo 14.1. Determinar la fuerza crítica para la barra de dos tramos de rigidez diferente (fig. 497). La rigidez de un tramo es cuatro veces mayor que la del otro.

Para los tramos uno y dos obtenemos respectivamente las ecuaciones,

$$EI y_1'' + P y_1 = 0, \quad 4EI y_2'' + P y_2 = 0.$$

Anotando,

$$\frac{P}{4EI} = k^2$$

obtendremos,

$$y_1'' + 4k^2 y_1 = 0, \quad y_2'' + k^2 y_2 = 0,$$

de donde hallamos,

$$y_1 = C_1 \sin 2kx + C_2 \cos 2kx, \quad y_2 = C_3 \sin kx + C_4 \cos kx.$$

De la condición de que, cuando $z=0$ la flecha $y_1=0$ se obtiene $C_2=0$.

Disponemos de tres condiciones más: cuando $z = \frac{l}{2}$ los desplazamientos $y_1=y_2$ e $y_1'=y_2'$ y cuando $z=l$, la flecha $y_2=0$. Planteamos las tres ecuaciones

correspondientes,

$$C_1 \sin kl = C_3 \sin \frac{kl}{2} + C_4 \cos \frac{kl}{2},$$

$$2C_1 \cos kl = C_3 \cos \frac{kl}{2} - C_4 \sin \frac{kl}{2},$$

$$C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0.$$

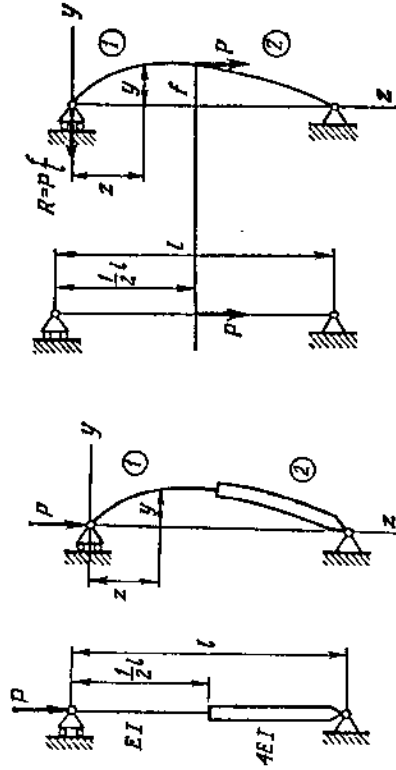


Fig. 497.

Igualando a cero el determinante de este sistema

$$\begin{vmatrix} \sin kl & -\sin \frac{kl}{2} & -\cos \frac{kl}{2} \\ 2 \cos kl & -\cos \frac{kl}{2} & \sin \frac{kl}{2} \\ 0 & \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0,$$

se obtienen las dos ecuaciones siguientes,

$$\sin \frac{kl}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}^3 \frac{kl}{2} = 2.$$

La raíz mínima diferente de cero se obtiene de la condición,

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \sqrt{2}, \quad \frac{kl}{2} = 0.955.$$

Así pues,

$$P_{\text{crit}} = \frac{14.8 EI}{l^2}.$$

Ejemplo 14.2. Determinar la fuerza crítica para el caso de la barra articulada por una fuerza axial en la sección media (fig. 498).

En este caso se obtiene para los tramos primero y segundo,

$$EI y_1'' = -P \frac{f}{l} z, \quad EI y_2'' = -P \frac{f}{l} z + P(f - y),$$

o sea,

$$y_1'' = -\frac{k^2 f}{l} z, \quad y_2'' + k^2 y_2 = k^2 f \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

de donde hallamos

$$y_1 = -\frac{k^2 f z^3}{l} + C_1 z + C_2,$$

$$y_2 = C_3 \sin kz + C_4 \cos kz + f \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

Cuando $z=0$ la flecha $y_1=0$ y, por lo tanto, $C_2=0$. Cuando $z=\frac{l}{2}$ los desplazamientos $y_1=f$, $y_2=f$ y $y_1'=y_2'$ y cuando $z=l$ la flecha $y_2=0$. Así pues, llegamos a las cuatro ecuaciones siguientes,

$$-\frac{k^2 f l^3}{l} + C_1 \frac{l}{2} = f,$$

$$C_3 \sin \frac{kl}{2} + C_4 \cos \frac{kl}{2} + \frac{1}{2} f = f,$$

$$-\frac{k^2 f l}{8} + C_1 = C_3 k \cos \frac{kl}{2} - C_4 k \sin \frac{kl}{2} - \frac{f}{l},$$

$$C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0.$$

Igualemos a cero el determinante de este sistema, considerando C_1 , C_3 , C_4 y f como incógnitas. Entonces,

$$\begin{vmatrix} \frac{l}{2} & 0 & 0 & -1 - \frac{k^2 l^2}{48} \\ 0 & \sin \frac{kl}{2} & \cos \frac{kl}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -k \cos \frac{kl}{2} & k \sin \frac{kl}{2} & \frac{1}{l} - \frac{k^2 l}{8} \\ 0 & \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se obtiene,

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{\frac{3}{2} kl}{\left(\frac{kl}{2}\right)^2 - 9}.$$

La raíz mínima de esta ecuación será,

$$\frac{kl}{2} = 2.16$$

y entonces,

$$P_{\text{crit}} \approx \frac{18.7EI}{l^2}.$$

Ejemplo 14.3. Determinar la fuerza crítica para la barra empotrada, en cuyo extremo libre se transmite la fuerza P a través de una biela rígida de longitud a (fig. 499).

Retiramos la biela rígida y aplicamos a la barra elástica la fuerza longitudinal $P' \approx P$ y la fuerza cortante $P \frac{f}{a}$. Entonces,

$$EI y'' = P(f - y) + P \frac{f}{a}(l - z),$$

o

$$y'' + k^2 y = k^2 f \left(1 + \frac{l}{a} - \frac{z}{a}\right),$$

de donde se obtiene,

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + f \left(1 + \frac{l}{a} - \frac{z}{a}\right).$$

Tenemos además las condiciones de borde siguientes: cuando $z=0$, $y=0$ e $y'=0$ y cuando $z=l$, $y=f$.

Así obtenemos tres ecuaciones

$$C_2 + f \left(1 + \frac{l}{a}\right) = 0, \quad C_1 k - f \frac{1}{a} = 0, \quad C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

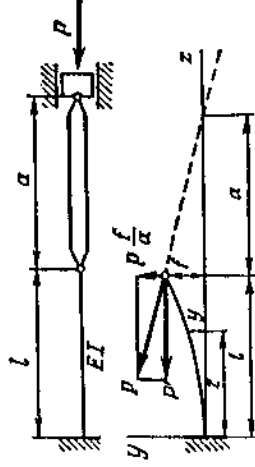


Fig. 499.

Igualemos a cero el determinante de este sistema llegamos a la ecuación transcendental siguiente:

$$\operatorname{tg} kl = kl \left(1 + \frac{a}{l}\right),$$

de la que se determina la fuerza crítica en función de la razón $\frac{a}{l}$. En el caso particular, cuando $a=0$, obtenemos, la ecuación (14.18) y cuando $a=\infty$, la fuerza crítica resulta

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

lo que fue obtenido anteriormente para la barra empotrada en un extremo.

§ 93. Estabilidad de la barra en el caso de deformaciones plásticas

Todos los problemas analizados anteriormente fueron resueltos, suponiendo que el material de la barra, durante la compresión, no adquiere deformaciones plásticas. Esto era válido en el caso de barras relativamente largas y finas en las que las tensiones de compresión en el caso de cargas críticas, no superaban el límite de proporcionalidad. En el caso de barras más cortas y rígidas, la fuerza crítica resulta superior, existiendo la posibilidad del surgimiento de deformaciones plásticas en la etapa de compresión simple, es decir, antes de la pérdida de la estabilidad. Se obtiene así un problema intermedio. Por una parte, este no es el cálculo común por compresión, puesto que la barra es suficientemente larga y mantiene en su comportamiento las particularidades relacionadas con el fenómeno de la