Tema 2

Campos escalares y vectoriales continuos. Límite funcional.

En este tema, por abstracción de las propiedades de la norma y la distancia euclídea, se presentan las nociones de espacio normado y espacio métrico. La topología usual de $\mathbb{R}^N$ es la generada por la norma euclídea, esto es, los abiertos son uniones de bolas abiertas euclídeas. El Teorema de Hausdorff, resultado principal de este tema, afirma que dicha topología coincide con la topología asociada a cualquier norma en $\mathbb{R}^N$. Probamos también las extensiones a $\mathbb{R}^N$ de los Teoremas de complitud y de Bolzano-Weierstrass.

Definimos los compactos de $\mathbb{R}^N$ como los subconjuntos cerrados y acotados. Presentamos dos caracterizaciones de los compactos que son estupendas herramientas en las demostraciones por compacidad (aquellas cuyos enunciados están ligados a la noción de compacto). La primera afirma que toda sucesión en un compacto se acumula (Teorema 2.28) y la segunda que todo compacto verifica el axioma de Heine-Borel (Teorema 2.31). Introducimos también las nociones de convexidad y conexión en $\mathbb{R}^N$ que son las extensiones geométrica y topológica, respectivamente, de la noción de intervalo de $\mathbb{R}$.

Definimos la continuidad de funciones reales de varias variables reales y probamos que tales funciones conservan los compactos y los conexos. El Teorema de Dini da condiciones suficientes para que una sucesión de funciones que, en principio, converge sólo puntualmente converja uniformemente. El Teorema de Heine nos asegura que las funciones continuas definidas en compactos son de hecho uniformemente continuas.

Terminamos la lección estudiando el concepto de límite funcional (indispensable para definir el concepto de función derivable) y la relación que existe entre éste y la continuidad.

En lo sucesivo, para cada natural N, $\mathbb{R}^N$ denota el espacio vectorial real de las N-uplas de números reales, es decir,

$$\mathbb{R}^N := \{x = (x_1, ..., x_N) : x_1, ..., x_N \in \mathbb{R}\}$$

con las definiciones usuales de suma y producto por escalares

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_N + y_N), \quad \lambda x := (\lambda x_1, ..., \lambda x_N).$$

A las componentes $x_1, ..., x_N$ de la N-upla que define el vector x se les denominan *coordenadas* de dicho vector. Cuando haya lugar a confusión, y en especial cuando se esté trabajando con sucesiones en $\mathbb{R}^N$, denotaremos a las coordenadas de un vector $x \in \mathbb{R}^N$ en la forma $x = (x(1), ..., x(N))$. Así, por ejemplo, si $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^N$ a la coordenada k-ésima del término x_n se le denotará $x_n(k)$.

2.1. Normas y distancias.

Recordemos que la *norma euclídea* en $\mathbb{R}^N$, es decir, la aplicación $\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$\|x\|_2 : \sqrt{(x|x)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2} \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

goza de las siguientes propiedades:

i) $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \ \|x\|_2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

iii) $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

A $(\mathbb{R}^N, \|.\|_2)$ se le llama *el espacio euclídeo* (de dimensión N).

Ello nos invita a dar la siguiente definición.

Definición 2.1. Si X es un espacio vectorial real, una *norma* en X es una función $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ verificando

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in X$ (homogeneidad).

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$ (desigualdad triangular) .

El par ordenado $(X, \| \cdot \|)$ se llama *espacio normado* .

Observaciones 2.2.

a) En *i*) basta exigir sólo la condición

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

ya que de *ii*) se deduce que $\|0\| = 0$.

b) De la definición se sigue que también se puede prescindir en la definición de que la norma toma valores no negativos, ya que

$$0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0.$$

c) De *ii*) y *iii*) se deduce fácilmente que

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x \pm y\|,\ \forall x, y \in X.$$

d) Por último, de *iii*) se deduce fácilmente por inducción que

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|,\ \forall x_1, \cdots, x_n \in X.$$

Ejemplos 2.3.

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio normado. De hecho, en $\mathbb{R}$ todas las normas son producto del valor absoluto por una constante positiva.

2. Algunas normas en $\mathbb{R}^N$.
Además de la norma euclídea, en $\mathbb{R}^N$ consideraremos entre otras la <u>*norma de la suma*</u> y la <u>*norma del máximo*</u>, dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{r} \|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_N|, \\ \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|\} \end{array} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

No es difícil comprobar (hágase como ejercicio) que ambas son normas y que se verifica la desigualdad (véase el Ejemplo 2.13)

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Es conveniente dibujar la esfera unidad (elementos que tienen norma 1) en dimensión 2 para tener una idea de cómo se comporta la norma. Si consideramos la bola unidad cerrada asociada a una norma, esto es,

$$B := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\},$$

ocurre que a bolas menores corresponden mayores normas.

3. En el espacio vectorial $\mathcal{C}[a,b]$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, se puede definir, por la propiedad de compacidad, la norma dada por

$$\|f\|_\infty = \max\ \{|f(x)| : x \in [a,b]\} \qquad (f \in \mathcal{C}[a,b]).$$

Compruébese que de hecho es una norma.

Recordemos ahora que la <u>*distancia euclídea*</u> en $\mathbb{R}^N$, es decir, la aplicación

$$d_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

definida por

$$d_2(x,y) = \|x - y\|_2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}^N),$$

verifica las siguientes propiedades:

1. $d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d_2(x, y) = d_2(y, x)$.
3. $d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$.

Ello nos invita a dar la siguiente definición.

Definición 2.4. Una *distancia* (o *métrica*) definida en un conjunto no vacío E es una función $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in E$ (propiedad simétrica).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \ \forall x, y, z \in E$ (desigualdad triangular).

Al par ordenado (E, d) se le denomina *espacio métrico* .

Observaciones 2.5.

a) Una aplicación $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique 1), 2) y 3) no toma valores negativos, ya que
$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

b) $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z), \ \forall x, y, z \in E.$
En efecto, usando 2) y 3) se tiene
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(y, z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z),$$
Intercambiando x por z y usando 2) se obtiene
$$d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z),$$
por tanto,
$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z), \ \forall x, y, z \in E.$$

c) De 3) se deduce por inducción la desigualdad
$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \ \forall x_1, \cdots, x_n \in E.$$

Ejemplos 2.6.

1. *Subespacio métrico.*
Es claro que todo subconjunto A no vacío de un espacio métrico (E, d) también es un espacio métrico, sin más que considerar en A la restricción de la distancia de E. El conjunto A, dotado de esta métrica, es un subespacio métrico de (E, d).

2. *Distancia asociada a una norma.*
Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, la distancia en X asociada a la norma viene dada por
$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X).$$
Compruébese que efectivamente es una distancia. En particular, la distancia usual en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ viene dada por
$$d(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in A.$$

3. *Espacio métrico producto.*
Dados n espacios métricos (E_1, d_1),(E_2, d_2),...,(E_n, d_n), podemos definir una distancia en el producto $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ por
$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) := \max \{d_1(x_1, y_1), ..., d_n(x_n, y_n)\}.$$

2.2. Topología de un espacio métrico.

Definición 2.7. Sea (E, d) un espacio métrico. Dados $a \in E$, $r \geq 0$, la bola abierta (resp. cerrada) de centro a y radio r son los conjuntos dados por
$$B(a, r) := \{x \in E : d(x, a) < r\},$$
$$\overline{B}(a, r) := \{x \in E : d(x, a) \leq r\}.$$
La esfera de centro a y radio r es, por definición, el conjunto
$$S(a, r) := \{x \in E : d(x, a) = r\}.$$

Un subconjunto O de un espacio métrico (E, d) se dice abierto si verifica la siguiente condición:
$$\forall a \in O, \exists r > 0 : B(a, r) \subset O.$$

Es fácil ver que una bola abierta es un conjunto abierto, que los conjuntos abiertos son aquellos que se pueden expresar como unión de bolas abiertas y, si notamos por $\Im$ a la familia de todos los conjuntos abiertos, se verifica:

i) $\emptyset, E \in \Im$.

ii) $\mathcal{A} \subset \Im \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \Im$.

iii) $O_1, O_2 \in \Im \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \Im$.

Por tanto, $\Im$ es una *topología* en E.

Dado que todo espacio normado $(X, \|.\|)$ es un espacio métrico con la distancia definida por $d(x,y) := \|y - x\|$ $(x, y \in X)$, la *topología de un espacio normado* es la topología asociada a la métrica descrita.

Definición 2.8. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $\Im$ la familia de sus conjuntos abiertos. Un subconjunto F de E es *cerrado* si su complementario es abierto, esto es, si $E \backslash F \in \Im$. Si notamos $\mathcal{F}$ a la familia de los conjuntos cerrados, es fácil comprobar que se verifica:

i) $\emptyset, E \in \mathcal{F}$.

ii) $\mathcal{B} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{F \in \mathcal{B}} F \in \mathcal{F}$.

iii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

Es fácil probar que las bolas cerradas y las esferas son conjuntos cerrados.

Sea A un subconjunto de E, un elemento $x \in E$ se dice que es *adherente* a A si para cada positivo r se verifica

$$B(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

Se llama *adherencia* o *cierre* de A al conjunto de todos los valores adherentes de A, que notaremos por $\overline{A}$. Es inmediato que $A \subset \overline{A}$.

Un elemento $x \in E$ se dice que es *interior* de A si se verifica que

$$\exists r > 0 : B(x,r) \subset A.$$

Notaremos por $\overset{\circ}{A}$ al conjunto de todos los puntos interiores de A, conjunto que claramente verifica $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Por último, llamaremos *frontera* de A al conjunto $Fr(A) := \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.

Ejemplo 2.9. Pruébese que si $A \subset \mathbb{R}$ está mayorado (resp. minorado) y no es vacío entonces $\sup A \in \overline{A}$ (resp. $\inf A \in \overline{A}$). Hallar $\overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}, \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}}$.

El siguiente resultado, cuya demostración se deja como ejercicio (¡también!), resume las primeras propiedades que relacionan los conceptos anteriores.

Proposición 2.10. *Sea (E, d) un espacio métrico y notemos por $\Im$ a la familia de sus abiertos y por $\mathcal{F}$ a la de sus cerrados. Cada subconjunto A de E verifica:*

i) $(O \in \Im, O \subset A) \Rightarrow O \subset \overset{\circ}{A}$.

ii) $\overset{\circ}{A} \in \Im$.

iii) $\overset{\circ}{A}$ *es el mayor abierto incluido en A, en consecuencia,* $\overset{\circ}{A}$ *es la unión de todos los abiertos incluidos en A.*

iv) $A \in \Im \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

v) $(F \in \mathcal{F}, A \subset F) \Rightarrow \overline{A} \subset F$.

vi) $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

vii) $\overline{A}$ *es el menor cerrado que contiene a A y coincide con la intersección de todos los cerrados que contienen a A.*

viii) $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A = \overline{A}$.

ix) $\overset{\circ}{(E \backslash A)} = E \backslash \overline{A}$, *equivalentemente* $\overset{\circ}{A} = E \setminus \overline{E \setminus A}$.

x) $E \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{E \backslash A}$, *equivalentemente* $\overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{(E \setminus A)}$.

De la igualdad $E \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{E \backslash A}$, se deduce que $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{(E \backslash A)}$.
A continuación extendemos el concepto de convergencia en $\mathbb{R}$ a espacios métricos.

Definición 2.11 (Convergencia en espacios métricos). Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico (E, d) es <u>*convergente*</u> si existe un elemento $x \in E$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

equivalentemente, si $\{d(x_n, x)\} \to 0$. Si se verifica la condición anterior, diremos que $\{x_n\}$ converge a x y en tal caso escribiremos $\{x_n\} \to x$.
Es fácil comprobar (ejercicio) que el elemento x que verifica la condición de convergencia es único y se llama <u>*límite de la sucesión* $\{x_n\}$</u>, y entonces escribiremos $x = \lim \ x_n$.

El concepto de sucesión de Cauchy en un espacio métrico es también copia literal del dado para $\mathbb{R}$.

Definición 2.12 (sucesión de Cauchy). Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico (E, d) es de <u>*Cauchy*</u> si se verifica

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon,$$

equivalentemente,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} : (n \geq m, h \in \mathbb{N}) \Rightarrow d(x_{n+h}, x_n) \leq \varepsilon.$$

Es inmediato comprobar que en un espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy. $(\mathbb{Q}, |.|)$ es un ejemplo de que el recíproco de esta afirmación no es cierto. Aquellos espacios métricos que verifican que toda sucesión de Cauchy es convergente se llaman *completos*. Un espacio normado y completo para la métrica asociada a la norma es un *espacio de Banach*. El espacio normado $(\mathcal{C}[0,2], \|.\|_1)$, es decir, el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas en $[0,2]$ con la norma integral dada por

$$\|f\|_1 := \int_0^2 |f(x)|dx,$$

no es completo[1] (véase Ejercicio 2.3).

Un subconjunto A de un espacio métrico (E,d) se dice completo si el espacio métrico (A,d) es completo, es decir, si toda sucesión en A que sea de Cauchy converge a un elemento de A.

Ejemplo 2.13 (Convergencia en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$). Si $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^N$ denotaremos por $x_n(k)$ a la coordenada k-ésima del término x_n. Probaremos que la convergencia en $\mathbb{R}^N$ se reduce a la convergencia coordenada a coordenada, esto es:

$$\{x_n\} \overset{\|\cdot\|_2}{\to} x \Leftrightarrow \{x_n(k)\} \to x(k),\ \forall k = 1, 2, \cdots, N$$

donde $x = (x(1), ..., x(N))$.
Demostración:

Probemos primeramente que para todo vector $x \in \mathbb{R}^N$ se verifica

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq N\|x\|_\infty \tag{1}$$

Denotando por $x(k)$ a las componentes del vector x, se prueba fácilmente la primera desigualdad, ya que

$$\|x\|_\infty^2 := \max\ \{|x(k)| : k = 1, ..., N\}^2 =$$

$$\max\ \{x(k)^2 : k = 1, ..., N\} \leq \sum_{k=1}^N x(k)^2 = \|x\|_2^2.$$

Y por otro lado

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^N x(k)^2} \leq \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \overset{N}{\cdots} + \|x\|_\infty^2} = \sqrt{N}\|x\|_\infty \leq N\|x\|_\infty.$$

[1] La no complitud del espacio $(\mathcal{C}[0,2], \|.\|_1)$ no es consecuencia de la norma elegida, sino de que es necesario ampliar sensiblemente el conjunto de funciones integrables para conseguir la complitud y que en consecuencia las cosas marchen bien. Algo análogo ocurre con $\mathbb{Q}$ y su “completación” a $\mathbb{R}$

De la primera desigualdad de (1) se sigue que si una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}^N$ tiene límite x, entonces $\{x_n(k)\} \to x(k)$ para todo $k = 1, ..., N$. Supongamos ahora que

$$\{x_n(k)\} \to x(k), \ \forall k = 1, ..., N.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, para cada $k = 1, \cdots, N$ existe un natural m_k tal que si $n \geq m_k$ entonces $|x_n(k) - x(k)| < \frac{\varepsilon}{N}$. Luego, si tomamos $m := \max \{m_1, \cdots, m_N\}$, se obtiene para $n \geq m$ que

$$\|x_n - x\|_2 \leq N\|x_n - x\|_\infty = N \ \max \{|x_n(1) - x(1)|, ..., |x_n(N) - x(N)|\} < N\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

■

Es muy fácil probar que en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ se verifica

$$\{x_n\} \text{ es de Cauchy } \Leftrightarrow \{x_n(k)\} \text{ es de Cauchy } \ \forall k = 1, 2, \cdots, N.$$

Como consecuencia del Teorema de complitud de $\mathbb{R}$, se tiene que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach.

Estúdiese la convergencia en $(\mathbb{R}^N, \|.\|_1)$ y en $(\mathbb{R}^N, \|.\|_\infty)$.

Ejemplo 2.14 (Convergencia en $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$). De la definición de la norma $\|.\|_\infty$ se sigue que

$$\{f_n\} \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in [a, b]).$$

La convergencia en $(\mathcal{C}[a, b], \|.\|_\infty)$ es la <u>*convergencia uniforme*</u> , que implica la convergencia puntual pero el recíproco no es cierto (véanse los Ejercicios 2.2 y 2.4).

Proposición 2.15 (Caract. secuencial de la adherencia en esp. métricos). *Sea A un subconjunto de un espacio métrico E y $x \in E$. Equivalen:*

i) x es un punto adherente a A.

ii) Existe una sucesión en A que converge a x.

En consecuencia, como $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \supset \overline{A}$, un subconjunto A de un espacio métrico es cerrado si, y sólo si, A contiene los límites de todas las sucesiones en A convergentes.

Demostración:

i) $\Rightarrow$ *ii)* Supongamos que x es un punto adherente a A, por tanto

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, para cada natural n, podemos elegir un elemento $a_n \in A$ que verifique $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$. Es claro que la sucesión $\{a_n\}$, así construida, cuyos términos están en A, converge a x.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión en A convergente a x. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe un natural m tal que

$$n \geq m \Rightarrow a_n \in B(x, \varepsilon),$$

y en consecuencia, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$. ∎

El siguiente resultado es útil para justificar que ciertos espacios métricos son completos. Su demostración hace uso de la anterior caracterización secuencial de la adherencia.

Proposición 2.16.

i) Todo subconjunto completo de un espacio métrico es cerrado.

ii) Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo.

Demostración:

i) Supongamos que A es un subconjunto completo de un espacio métrico E. Sea $x \in \overline{A}$, por tanto, en vista de la Proposición 2.15, existe una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A convergente a x. La sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy y, por ser A completo, ha de converger a un elemento de A, por tanto, $x \in A$. Hemos probado que $\overline{A} \subset A$, y, por tanto, A es cerrado.

ii) Sea A un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo E. Fijamos una sucesión $\{a_n\}$ de Cauchy en A. Por ser E completo, existe un elemento $x \in E$ que es el límite de la sucesión $\{a_n\}$, por tanto, usando de nuevo la Proposición 2.15, x es adherente a A, y por ser A cerrado, concluimos que $x \in A$, luego A es completo. ∎

Observación 2.17. Nótese que, como consecuencia de la caracterización secuencial de la adherencia (Proposición 2.15), en un espacio métrico es suficiente conocer las sucesiones convergentes y sus límites para conocer los conjuntos cerrados, y, por tanto, la topología.

Nota 2.18. El concepto de convergencia de una sucesión es topológico, esto es, depende de la topología del espacio métrico, pero no de la distancia concreta que se utilice. Esto significa simplemente que si dos distancias d y d^* generan la misma topología, entonces las sucesiones convergentes coinciden para ambas distancias. En efecto, supongamos que $\{x_n\}$ converge a x en la distancia d. Dado $\varepsilon > 0$, puesto que $B_{d^*}(x, \varepsilon)$ es un abierto que contiene a x y d genera la misma topología que d^*, ha de existir $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subset B_{d^*}(x, \varepsilon)$. Como estamos suponiendo que $\{x_n\}$ converge en la distancia d, ha de existir un natural m verificando que

$$n \geq m \Rightarrow d(x_n, x) < r.$$

En vista de la elección de r se tiene también que $d^*(x_n, x) < \varepsilon$ para $n \geq m$, y, por tanto $\{x_n\}$ converge también a x en la distancia d^*.

Probaremos que "*dos normas cualesquiera en $\mathbb{R}^N$ generan la misma topología*". Para preparar la prueba de este importantísimo resultado introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.19. Dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ en un mismo espacio vectorial X se dicen *equivalentes* si existen constantes $m, M > 0$ verificando

$$m\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Es inmediato probar que la relación binaria que hemos definido entre normas es de equivalencia.

Proposición 2.20. *Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en el espacio vectorial X. Equivalen las siguientes condiciones:*

i) Las normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes.

ii) Ambas normas generan la misma topología.

Demostración:

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sea O un abierto para la topología asociada a $\|\cdot\|$. Dado $a \in O$, existe $r > 0$ tal que

$$B_{\|\cdot\|}(a, r) \subset O,$$

pero, por ser, ambas normas equivalentes, existe una constante $m > 0$ tal que

$$m\|x\| \leq |||x|||, \ \forall x \in X.$$

Por tanto, se tiene

$$B_{|||\cdot|||}(a, mr) \subset B_{\|\cdot\|}(a, r) \subset O,$$

y O es abierto para la topología asociada a la norma $|||\cdot|||$. La inclusión contraria es consecuencia de la otra desigualdad ente las normas.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Por ser las bolas abiertas conjuntos abiertos, existe una constante $s > 0$ tal que

$$B_{|||\cdot|||}(0,s) \subset B_{\|\cdot\|}(0,1).$$

Sea $x \in X$ un elemento no nulo, entonces, es claro que se verifica

$$\left|\left|\left| \frac{sx}{2|||x|||} \right|\right|\right| < s \Rightarrow \left\| \frac{sx}{2|||x|||} \right\| < 1 \Rightarrow \frac{s}{2}\|x\| \leq |||x|||$$

En vista de la hipótesis, ambas normas están en las mismas condiciones, luego también se puede probar que existe una constante M tal que $|||x||| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. ∎

Para probar el Teorema de Hausdorff, en primer lugar, generalizaremos al espacio euclídeo el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Definición 2.21 (conjunto acotado). Un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) se dice <u>*acotado*</u> si existen $M > 0$ y $x_0 \in E$ tales que $A \subset B(x_0, M)$. Así, un subconjunto A de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, es acotado si existe $M > 0$ tal que $\|a\| < M$, $\forall a \in A$.

Pruébese que toda sucesión convergente es acotada. De hecho, toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico es también acotada.

Teorema 2.22 (Bolzano-Weierstrass en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)_2)$). *$(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ verifica la propiedad de Bolzano-Weierstrass, es decir, toda sucesión acotada en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ admite una parcial convergente.*

Demostración:
Haremos la prueba por inducción sobre la dimensión del espacio. Para $N = 1$, se trata del Teorema de Bolzano-Weierstrass, que es conocido en $\mathbb{R}$. Supongamos que se verifica para $\mathbb{R}^N$. En $\mathbb{R}^{N+1}$ se tiene que

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x(1)^2 + \cdots + x(N)^2 + y^2},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Fijamos una sucesión acotada en $\mathbb{R}^{N+1}$, que podemos suponer de la forma $\{(x_n, y_n)\}$, donde $x_n \in \mathbb{R}^N$, $y_n \in \mathbb{R}$, para cada natural n. En vista de $(*)$, las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son acotadas. Por hipótesis de inducción, la primera admite una parcial convergente, que escribiremos $\{x_{\sigma(n)}\}$, ahora bien, por ser $\{y_{\sigma(n)}\}$ acotada (parcial de una acotada), el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura que admite una parcial convergente que escribiremos $\{y_{\sigma(\tau(n))}\}$[2]. Finalmente, la sucesión en $\mathbb{R}^{N+1}$ dada por $\{(x_{\sigma(\tau(n))}, y_{\sigma(\tau(n))})\}$ es una parcial convergente de $\{(x_n, y_n)\}$. ∎

Teorema 2.23 (Hausdorff). *Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.*

[2]Obsérvese que si notamos $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$, entonces $\{y_{\tau(n)}\} = \{x_{\sigma(\tau(n))}\}$

Demostración:

Probaremos que si $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en $\mathbb{R}^N$, entonces equivale a la norma euclídea. Notamos por $\{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Dado cualquier vector $x \in \mathbb{R}^N$ que se escriba de la forma $x = x(1)e_1 + \cdots + x(N)e_N$, se tiene

$$\begin{aligned}\|x\| = \|x(1)e_1 + \cdots + x(N)e_N\| \leq &\quad \text{(por la desigualdad triangular)} \\ \leq |x(1)|\ \|e_1\| + \cdots + |x(N)|\ \|e_N\| \leq & \\ \leq (\|e_1\| + \cdots + \|e_N\|)\|x\|_\infty & \\ \leq (\|e_1\| + \cdots + \|e_N\|)\|x\|_2, &\end{aligned}$$

luego, tomando $M = \|e_1\| + \cdots + \|e_N\|$ se tiene que

$$\|x\| \leq M\|x\|_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Ahora definimos

$$m := \inf\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}.$$

Probaremos que m es un mínimo[3]. Sabemos que por ser m el ínfimo del conjunto anterior, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $\mathbb{R}^N$ verificando

$$\|x_n\|_2 = 1, \qquad \{\|x_n\|\} \to m$$

(véanse el Ejemplo 2.9 y la Proposición 2.15).

Como $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ verifica la propiedad de Bolzano-Weierstrass (Teorema 2.22), ha de existir un elemento $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\{x_{\sigma(n)}\} \stackrel{\|\cdot\|_2}{\longrightarrow} x_0,$$

con lo que se tiene

$$\|x_0\|_2 = \lim\ \{\|x_{\sigma(n)}\|_2\} = 1,$$

en particular $x_0 \neq 0$. Por la desigualdad ya probada entre las normas se tiene

$$|\ \|x_{\sigma(n)}\| - \|x_0\|\ | \leq \|x_{\sigma(n)} - x_0\| \leq M\|x_{\sigma(n)} - x_0\|_2,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

y en virtud de la convergencia en la norma euclídea de $\{x_{\sigma(n)}\}$ a x_0, concluimos que $\{\|x_{\sigma(n)}\|\}$ converge a $\|x_0\|$, por tanto $m = \|x_0\| > 0$.

Queremos probar ahora que

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|,\quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

desigualdad que es cierta si $x = 0$. Si $x \neq 0$, se tiene

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2 = 1 \Rightarrow m \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \Rightarrow m\|x\|_2 \leq \|x\|. \qquad \blacksquare$$

[3]De haber pospuesto la demostración de este teorema a la obtención de la propiedad de compacidad (Proposición 2.51), esto habría sido inmediato. En efecto, dado que la función norma $\|\cdot\|$ es continua en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ (nótese que $|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x-y\| \leq M\|x-y\|_2$) y que la esfera unidad para la norma euclídea $S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$ es compacta, por la propiedad de compacidad, el conjunto $\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}$ tiene mínimo.

Dado que "*no existe más espacio vectorial real de dimensión N que $\mathbb{R}^N$*", podemos decir que *en "cualquier" espacio vectorial real finito-dimensional todas las normas son equivalentes* (véase problema 2.8). En realidad, tal propiedad caracteriza la finito-dimensionalidad de un espacio vectorial.

Como corolario del teorema anterior y de la Proposición 2.20 se obtiene:

Corolario 2.24. *Existe una única topología en $\mathbb{R}^N$ que proceda de una norma a la que llamaremos la topología de la norma .*

En todo lo que sigue, se supondrá que $\mathbb{R}^N$ está dotado de la topología de la norma, cuyos abiertos no son más que uniones de bolas abiertas para alguna norma. En el caso de $\mathbb{R}$, los abiertos son uniones de intervalos abiertos.

La segunda consecuencia del Teorema de Hausdorff es que el concepto de sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^N$ es independiente de la norma. Este hecho, junto con el Teorema de complitud de $\mathbb{R}$ y el Ejemplo 2.13 nos prueban el siguiente resultado.

Teorema 2.25 (complitud). *En $\mathbb{R}^N$, toda sucesión de Cauchy es convergente, esto es, $\mathbb{R}^N$ es un espacio de Banach con cualquier norma.*

La tercera consecuencia del Teorema de Hausdorff es que el concepto de acotación en $\mathbb{R}^N$ es independiente de la norma.

El Teorema 2.22 admite ahora el siguiente enunciado.

Teorema 2.26 (Bolzano-Weierstrass). *$\mathbb{R}^N$ verifica la propiedad de Bolzano-Weierstrass, es decir, toda sucesión acotada admite una parcial convergente.*

2.3. Compactos, convexos y conexos.

Dedicamos esta sección a presentar tres tipos distinguidos de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$: los compactos, los convexos y los conexos.

En la demostración del Teorema de Hausdorff sólo se ha tenido en cuenta que $S_{\|.\|_2}(0,1)$ es un conjunto acotado y cerrado. [4] Ello nos motiva a destacar estos subconjuntos de $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.27. Un subconjunto K de $\mathbb{R}^N$ es *compacto* si es cerrado y acotado.

Decir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos: $\mathbb{N}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\{a\}$, $B(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$, $S(a,r)$, $[a,b] \cup [c,d]$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Obsérvese que el punto crucial de la demostración del tan citado Teorema de Hausdorff consiste en probar que toda sucesión en la esfera $S_{\|.\|_2}(0,1)$ se acumula, es decir, admite una parcial convergente a un punto de dicha esfera. Esto nos motiva la siguiente caracterización de los compactos de $\mathbb{R}^N$ que será una herramienta básica en futuras demostraciones y que a su vez nos permite extender dicho concepto a espacios métricos cualesquiera.

Teorema 2.28 (Caracterización de los compactos de $\mathbb{R}^N$). *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^N$. Equivalen:*

i) K es compacto (cerrado y acotado de $\mathbb{R}^N$).

ii) Toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge a un punto de K.

Demostración:

$i) \Rightarrow ii)$ Sea $\{x_n\}$ una sucesión en K. Por hipótesis, $\{x_n\}$ es acotada y, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente a un vector x que necesariamente ha de pertenecer a K, por ser K un conjunto cerrado.

$ii) \Rightarrow i)$ K es cerrado: Sea $x \in \overline{K}$ y $\{x_n\}$ una sucesión en K convergente a x. Por hipótesis, existe $\{x_{\sigma(n)}\} \to y \in K$. Puesto que también $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$, deducimos de la unicidad del límite que $x \in K$. Hemos probado que $\overline{K} \subset K$ y por tanto K es cerrado.

K es acotado: Supongamos que K no es acotado. Se tiene entonces que $K \backslash B(0,n) \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego podemos elegir para cada natural n, un elemento $x_n \in K \backslash B(0,n)$. La sucesión $\{x_n\}$ así elegida no puede tener ninguna parcial convergente ya que $\|x_n\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y, por tanto, todas sus parciales son no acotadas. Hemos probado que si K es no acotado, entonces no se verifica $ii)$. ■

[4] Del Teorema de Bolzano-Weierstrass se sigue que toda sucesión en un conjunto acotado admite una parcial convergente; si además el conjunto es cerrado, la caracterización secuencial de la adherencia (Proposición 2.15) nos asegura que el límite se queda en el conjunto.

Definición 2.29. Un subconjunto K de un espacio métrico es *compacto* si toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge a un punto de K.

Recordamos que en un espacio métrico (E, d) todo subconjunto $A \subset E$ es también un espacio métrico con la distancia inducida. Como todo espacio métrico tiene una topología que procede de la distancia, a la topología asociada a la restricción de d al subconjunto A se le llama *topología inducida* en A. En cualquier espacio métrico, los abiertos son uniones de bolas abiertas. Ahora bien, una bola abierta en A no es más que un conjunto del tipo $\{x \in A : d(x, a) < r\}$, donde $a \in A$ y $r \geq 0$, pero este conjunto no es otra cosa que $B(a, r) \cap A$. Por tanto, si G es un abierto de A, existe un abierto O de E tal que $G = O \cap A$, esto es, los *abiertos de A* o *abiertos relativos en A* no son otra cosa que las intersecciones con A de los abiertos de E. Recíprocamente, es muy fácil probar que los conjuntos que se escriben como intersección de un abierto de E con A son, de hecho, abiertos de A.

Los cerrados de A son los complementos en A de los abiertos de A. Por razones similares, también los cerrados de A se obtienen intersecando A con los cerrados de E.

Por ejemplo, $]\frac{1}{2}, 1]$ es abierto de $]0, 1]$ y no es abierto. ¿Cuales son los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$?

Nota 2.30. Es interesante observar que en espacios métricos coinciden los subconjuntos compactos (anterior definición) y los subespacios compactos (con la topología inducida).

Es fácil probar que todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado[5], pero el recíproco no es cierto (véase el ejercicio 2.5).

El siguiente teorema caracteriza la compacidad en los espacios métricos en términos de su topología y permite definir dicho concepto en espacios topológicos generales.

Teorema 2.31 (Heine-Borel-Lebesgue). *Sea K un subconjunto de un espacio métrico (E, d). Equivalen:*

i) K es compacto.

ii) K verifica el axioma de Heine-Borel: todo recubrimiento por abiertos de K admite un subrecubrimiento finito, esto es, si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos de E tales que $K \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

La demostración puede verse en el apéndice (véase también el ejercicio 2.27).

La propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ nos asegura que $\{]\frac{1}{n}, 1[: n \in \mathbb{N}\}$ (respectivamente $\{]-n, n[: n \in \mathbb{N}\}$) es un recubrimiento por abiertos del conjunto $]0, 1[$ (resp. $\mathbb{R}$).

[5] La verificación de este hecho es una simple adaptación de $ii) \Rightarrow i)$ del Teorema 2.28, entendiendo como $i)$ ser cerrado y acotado en un espacio métrico

Pruébese que en ninguno de los casos anteriores se puede extraer un subrecubrimiento finito de los recubrimientos ¿Contradice este hecho el teorema anterior?

El axioma de Heine-Borel (afirmación *ii*) del anterior teorema) se toma como definición de compacidad en un espacio topológico cualquiera y es una valiosa herramienta en muchas demostraciones (véase por ejemplo el Teorema de Dini, Teorema 2.52).

Nota 2.32. Obsérvese que en al axioma de Heine-Borel se pueden sustituir simultáneamente los abiertos por abiertos relativos y la inclusión por igualdad, es decir, la compacidad sólo depende de la topología del conjunto en cuestión. Con más precisión, a nivel de espacios topológicos también coinciden los subconjuntos compactos y los subespacios compactos.

Finalizamos esta sección presentando dos extensiones de la noción de intervalo de $\mathbb{R}$ a subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, una de naturaleza geométrica y otra de naturaleza topológica.

Recordemos que un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un intervalo si para cualesquiera $x, y \in I$ con $x \leq y$, se tiene que $[x, y] \subset I$. Como obviamente se tiene

$$[x, y] = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\},$$

entonces I es un intervalo si, y sólo si, para cualesquiera $x, y \in I$ y cualquier $t \in [0, 1]$, se verifica $x + t(y - x) \in I$. En efecto, basta considerar la desigualdad

$$\min\{x, y\} \leq (1 - t)x + ty \leq \max\{x, y\}, \ \forall t \in [0, 1].$$

La propiedad anterior que caracteriza a los intervalos tiene perfecto sentido en $\mathbb{R}^N$ y, por tanto, nos invita a generalizar el concepto de intervalo de la siguiente forma:

Definición 2.33. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ es *convexo* si se verifica

$$a, b \in A \Rightarrow a + t(b - a) \in A, \ \forall t \in [0, 1],$$

es decir, para cualesquiera dos elementos a, b en A, el segmento de extremos a y b está contenido en A.

Obviamente el anterior concepto tiene sentido en cualquier espacio vectorial. Es inmediato comprobar que en $\mathbb{R}^N$ las bolas abiertas son conjuntos convexos, e igual ocurre con las bolas cerradas. Como caso particular, por supuesto, se obtiene que los intervalos son conjuntos convexos. Al fin y al cabo, intentamos abstraer una propiedad que tienen (y que de hecho caracteriza a) los intervalos.

Para presentar la otra generalización de intervalo, la conexión, nos inspiraremos en esta otra caracterización de los intervalos:

Proposición 2.34. *Sea $C \subset \mathbb{R}$. Equivalen:*

i) C es un intervalo.

ii) No existen particiones no triviales de C en abiertos relativos, esto es, si O_1, O_2 son abiertos en C tales que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ y $C = O_1 \cup O_2$, entonces $O_1 = \emptyset$ o bien $O_2 = \emptyset$.

Demostración:

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sea C un intervalo y, razonando por reducción al absurdo, supongamos que C es la unión disjunta de dos abiertos O_1 y O_2 de C no vacíos. Sean entonces $a \in O_1, b \in O_2$. Podemos suponer sin perder de generalidad que $a < b$. Como C es un intervalo, se tiene que $[a,b] \subset C$. Definamos

$$c := \sup([a,b] \cap O_1).$$

Como $[a,b]$ es cerrado, es claro que $c \in [a,b] \subset C$. Si $c \in O_1$, entonces $c < b$, y al ser $[a,b]$ un intervalo y O_1 un abierto de C, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{r} [c, c+\delta[\subset [a,b] \\ \\ ]c-\delta, c+\delta[\cap C \subset O_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; [c, c+\delta[\; \subset [a,b] \cap O_1,$$

lo que contradice la definición de c.

Un razonamiento análogo (hágase) muestra que $c \notin O_2$, lo que lleva a contradicción. Hemos probado que un intervalo no admite particiones no triviales en abiertos relativos.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Si C no fuese un intervalo, entonces existirían números reales $x, y \in C$ y un real $z \notin C$ tales que $x < z < y$. Entonces, la partición

$$C = (]-\infty, z[\cap C) \cup (]z, +\infty[\cap C)$$

contradice ii). ■

Definición 2.35. Un conjunto C de un espacio métrico es *conexo* si verifica que la única partición de C en dos abiertos relativos es la trivial.

En la siguiente sección probaremos que, en los espacios normados, todo conjunto convexo es conexo, en particular, los segmentos y las bolas son conexos. Claramente un conjunto formado por dos elementos no es conexo.

Por supuesto, la definición de conexión puede darse en espacios topológicos.

2.4. Funciones continuas.

Recordemos que "la" topología de $\mathbb{R}^N$ es la topología de la norma.

Definición 2.36 (campo escalar y vectorial). Sean $M, N \in \mathbb{N}$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. Un *campo escalar* en A es una función de A en $\mathbb{R}$. Una función $f = (f_1, \ldots, f_M) : A \to \mathbb{R}^M$ se llama *campo vectorial* en A, y a los campos escalares f_i, para $i = 1, \ldots, M$, se les denomina *campo escalar* de f o funciones componentes de f.

Definición 2.37 (campo vectorial continuo). Sean $M, N \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^M$ un campo vectorial. Se dice que f es *continuo* en el punto a si para toda sucesión $\{a_n\}$ en A convergente a a, se tiene que la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a $f(a)$, es decir:

$$\big[\forall \{a_n\} \text{ en } A, \{a_n\} \to a\big] \Rightarrow \{f(a_n)\} \to f(a)$$

donde la convergencia de las sucesiones es relativa a las topologías de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$.

Se dice que la función f es continua en $B \subset A$ si lo es en todos los puntos de B. Se dice que la función f es continua si es continua en A.

Como consecuencia inmediata del Ejemplo 2.13, el estudio de la continuidad de los campos vectoriales se reduce al de sus campos escalares componentes como se recoge en el siguiente enunciado.

Proposición 2.38 (Reducción a campos escalares). *Sean $M, N \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $f = (f_1, \ldots, f_M) : A \to \mathbb{R}^M$ un campo vectorial en A y a un punto de A. Entonces*

$$f \text{ es continuo en } a \Leftrightarrow f_i \text{ es continuo en } a, \ \forall i = 1, \ldots, M.$$

El concepto de continuidad se extiende literalmente a funciones definidas entre espacios métricos:

Definición 2.39. Sean $(E, d), (F, \rho)$ espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $a \in A$. Se dice que la función f es *continua* en el punto a si

$$\big[\forall \{a_n\} \text{ en } A, \{a_n\} \xrightarrow{d} a\big] \Rightarrow \{f(a_n)\} \xrightarrow{\rho} f(a)$$

Se dice que la función f es continua en $B \subset A$ si lo es en cada punto de B. Se dice que f es continua si es continua en A.

Como la convergencia de una sucesión es un concepto topológico, el concepto de continuidad también es topológico, es decir, depende de las topologías de los espacios métricos pero no de las métricas concretas que se utilicen.

Los siguientes resultados se demuestran rutinariamente y se dejan como ejercicios.

Proposición 2.40 (Regla de la cadena para la continuidad). *Sean E_1, E_2, E_3 espacios métricos, $A \subset E_1$, $f : A \to E_2$, $B \subset E_2$, $g : B \to E_3$ y supongamos que $f(A) \subset B$. Si f es continua en un punto a de A y g es continua en $f(a)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a. Como consecuencia, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.*

Pongamos ahora de manifiesto la buena convivencia entre el álgebra y la topología de un espacio normado $(X, \|.\|)$. Esto es,

1. La suma en $(X, \|.\|)$ es continua, es decir, la aplicación de $X \times X$ en X definida por $(x, y) \;\to\; x + y$. En efecto, si $\{(x_n, y_n)\} \to (x, y)$, entonces

   $$\|(x + y) - (x_n + y_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \leq 2 \ \max \{\|x - x_n\|, \|y - y_n\|\} \to 0.$$

2. El producto por escalares en X es continuo, es decir la aplicación de $\mathbb{R} \times X$ en X definida por $(\lambda, x) \;\to\; \lambda x$. En efecto, si $\{\lambda_n\} \to \lambda$, $\{x_n\} \to x$, se tiene

   $$\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \leq \|(\lambda - \lambda_n)x + \lambda_n(x - x_n)\| \leq |\lambda - \lambda_n| \ \|x\| + |\lambda_n| \ \|x - x_n\| \leq$$

   $$(\|x\| + |\lambda_n|) \ \max \{|\lambda - \lambda_n|, \|x - x_n\|\} \to 0,$$

   donde se ha tenido en cuenta que $\{\lambda_n\}$ es acotada.

   En particular, el producto en $\mathbb{R}$ es continuo.

3. La norma $\|.\|$ es continua, es decir la aplicación de X en $\mathbb{R}$ definida por $x \;\to\; \|x\|$. Basta tener en cuenta la desigualdad

   $$|\, \|x\| - \|x_n\| \,| \leq \|x - x_n\|.$$

Ahora es inmediata la demostración del siguiente resultado:

Corolario 2.41. *Sean (E, d) un espacio métrico, $(X, \|.\|)$ un espacio normado y $a \in A \subset E$.*

i) Si $f, g : A \to X$ son continuas en a y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y λf son continuas en a.

ii) Si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to X$ son continuas en a, entonces fg es continua en a.

iii) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en a y $f(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, entonces $\frac{1}{f}$ es continua en a.

iv) Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son continuas en a y $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Proposición 2.42 (Continuidad de la restricción). *Sean E y F espacios métricos, $B \subset A \subset E$ y $f : A \to F$, y consideremos la aplicación restricción de f a B, $f_{|B} : B \to F$ definida por $f_{|B}(x) := f(x), \ \forall x \in B$. Entonces $f_{|B}$ es continua en todo punto de B en el que f sea continua. En consecuencia, si la función f es continua, entonces su restricción a B también lo es.*

Es importante destacar que la continuidad no se transfiere a extensiones (las funciones definidas en un sólo punto son continuas, luego si la continuidad se transfiriese a extensiones, concluiríamos que todas las funciones son continuas). Sin embargo, se tiene el siguiente resultado parcial.

Proposición 2.43 (Carácter local de la continuidad). *Sean E, F espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $b \in B \subset A$. Si B es un "entorno relativo" de b (existe $r > 0$ tal que $B(b,r) \cap A \subset B$) y $f_{|B}$ es continua en b, entonces f es continua en b. En particular, si $f : E \to F$, $B \subset E$ es abierto y si $f_{|B}$ es continua, entonces f es continua en B.*

Demostración:
Sea $r > 0$ tal que $B(b,r) \cap A \subset B$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión en A convergente al punto b, entonces

$$\exists m \in \mathbb{N} : \ n \geq m \Rightarrow \ a_n \in B(b,r),$$

con lo que para $n \geq m$ se tiene que $a_n \in B$. Así $\{a_{m+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en B que converge al punto b, ya que es parcial de la sucesión $\{a_n\}$. Por ser $f_{|B}$ continua en b se tiene que $\{f(a_{m+n})\}_{n\in\mathbb{N}} \to f(b)$ y, por tanto, también $\{f(a_n)\} \to f(b)$. ■

Ejemplos 2.44 (funciones continuas).

1. Las proyecciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ son continuas, es decir las aplicaciones $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, N)$ definidas por $\pi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k$.
2. Toda función polinómica de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ es continua.
3. Toda función racional $R = \frac{P}{Q}$ en N variables es continua en su conjunto de definición:
$$\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ Q(x_1, \ldots, x_N) \neq 0\}.$$
4. Las funciones elementales reales de variable real (exponencial, logaritmo, raíces, funciones trigonométricas) son continuas en su dominio de definición.

La siguiente caracterización proporcionará la manera satisfactoria de introducir en espacios topológicos el concepto de continuidad en un punto.

Proposición 2.45 (ε-δ-caracterización de la continuidad). *Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $a \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) *f es continua en a.*

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ d(x,a) < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow\ \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$, *equivalentemente*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ f(B(a,\delta) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ *ii)* Supongamos que no se verifica *ii)*. Entonces existe un positivo ε_0 con la siguiente propiedad:

$$\forall \delta > 0,\ \exists a_\delta \in A : \left\{ \begin{array}{l} d(a_\delta, a) < \delta \\ \rho(f(a_\delta), f(a)) \geq \varepsilon_0 \end{array} \right. ,$$

en particular

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a_n \in A : \left\{ \begin{array}{l} d(a_n, a) < \frac{1}{n} \\ \rho(f(a_n), f(a)) \geq \varepsilon_0 \end{array} \right. .$$

Es inmediato que la sucesión $\{a_n\}$ en A así definida converge hacia a mientras que $\{f(a_n)\}$ no converge a $f(a)$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $\{a_n\}$ una sucesión en A convergente hacia a. Fijemos $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta > 0$ tal que

$$[x \in A,\ d(x,a) < \delta] \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Como $\{a_n\} \to a$, existe un natural m tal que si $n \geq m$ se verifica que $d(a_n, a) < \delta$, y por tanto

$$\rho(f(a_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Hemos probado que f es continua en a. ■

Es importante observar que, en la ε-δ-caracterización de la continuidad, el número positivo δ depende tanto del número positivo ε elegido, como del punto a de A prefijado. En general, para un mismo ε positivo pueden aparecer distintos δ dependiendo del punto a de A del que se trate.

En el caso en que, para cada $\varepsilon > 0$ fijo pueda encontrarse un positivo δ común, válido para todos los puntos de A, la función gozará de propiedades adicionales que la diferencian de las funciones que son únicamente continuas.

Definición 2.46 (continuidad uniforme). Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$ una función. Se dice que f es <u>uniformemente continua</u> si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : [x, y \in A, d(x,y) < \delta] \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

No es difícil comprobar que una función $f : A \to F$ es uniformemente continua si, y sólo si, se verifica la condición

$$a_n, b_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{d(a_n, b_n)\} \to 0 \Rightarrow \rho(f(a_n), f(b_n)) \to 0.$$

Es inmediato que si f es uniformemente continua, entonces f es continua. El recíproco no es cierto, de hecho existen funciones continuas muy sencillas que no son uniformemente continuas:

La función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua y, sin embargo, no es uniformemente continua ya que para cada natural n se tiene que

$$\left| f\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = n.$$

(Como consecuencia $\frac{1}{f}$ puede no ser uniformemente continua aunque lo sea f).

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es continua y, sin embargo, no es uniformemente continua ya que para cada natural n se tiene que

$$\left| f\left(n + \frac{1}{n}\right) - f(n) \right| > 2.$$

(Como consecuencia el producto de funciones uniformemente continuas no tiene por qué serlo).

En general, el producto por escalares en un espacio normado $(X, \|.\|)$ es continuo pero no es uniformemente continuo ya que para cada vector x no nulo y para cada natural n se tiene

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, nx\right), \left(\frac{1}{2n}, nx\right)\right) = \frac{1}{2n} \quad \text{y} \quad \left\| f\left(\frac{1}{n}, nx\right) - f\left(\frac{1}{2n}, nx\right) \right\| = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| \|x\| = \frac{1}{2}\|x\|.$$

Es claro que toda restricción de una función uniformemente continua también lo es.

Proposición 2.47 (Caracterización de la continuidad global). *Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$. Denotemos por $\Im_F$ (resp. $\Im_A$) la familia de los abiertos de F (resp. abiertos relativos de A) y por $\mathcal{F}_F$ (resp. $\mathcal{F}_A$) la familia de los cerrados de F (resp. cerrados relativos de A). Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) f es continua, equivalentemente (Proposición 2.45):

$$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_a > 0 : \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ d(x, a) < \delta_a \end{array} \right\} \Rightarrow\ \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

ii) La imagen inversa por f de cualquier abierto de F es un abierto relativo de A:

$$O \in \Im_F \Rightarrow\ f^{-1}(O) \in \Im_A.$$

iii) *La imagen inversa por f de cualquier cerrado de F es un cerrado relativo de A:*

$$C \in \mathcal{F}_F \Rightarrow \ f^{-1}(C) \in \mathcal{F}_A.$$

iv) *La función f aplica valores adherentes de cualquier subconjunto de A en valores adherentes de la imagen de dicho conjunto, esto es:*

$$f(\overline{B} \cap A) \subset \overline{f(B)}, \ \forall B \subset A.$$

Es importante destacar que en las sentencias $ii)$ y $iii)$ el calificativo relativo es obligado. Si no fuese así, entonces todos los conjuntos de un espacio métrico serían cerrados (cada subconjunto S se puede escribir de la forma $S = f^{-1}(\{0\})$ donde $f : S \to \mathbb{R}$ es la función constantemente cero, y por tanto S es la imagen inversa por una función continua de un cerrado), y en consecuencia también abiertos. Si la función toma valores reales y está definida en todo el espacio métrico, se tiene el siguiente resultado que permite reconocer subconjuntos abiertos y cerrados de un espacio métrico de forma muy sencilla.

Corolario 2.48. *Sean (E, d) un espacio métrico y $f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Denotemos por $\Im$ (resp. $\mathcal{F}$) la familia de los abiertos (resp. cerrados) de E. Entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que:*

i) $\{x \in E : f(x) < a\} \in \Im$.

ii) $\{x \in E : f(x) > a\} \in \Im$.

iii) $\{x \in E : f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$.

iv) $\{x \in E : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$.

v) $\{x \in E : f(x) = a\} \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 2.49. Los conjuntos

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x, y < \frac{1}{x}\right\}$$

y

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2 + y^2 - \operatorname{sen}\,(xy) < 2, \ ye^x > 2\}$$

son abiertos de $\mathbb{R}^2$.
En efecto, puesto que $A = A_1 \cap A_2$, donde

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x\} \text{ y } A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy < 1\}$$

el resultado se sigue de la continuidad de la aplicación proyección primera $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}$ y de la aplicación polinómica $P : \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}$ definida por $P(x, y) = xy$, y del hecho de que

$$A_1 = \pi_1^{-1}(]0, +\infty[) \text{ y } A_2 = P^{-1}(] - \infty, 1[).$$

La prueba de que B es abierto es análoga a la anterior sin más que considerar las funciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \text{sen }(xy)\ ,\ g(x,y) := ye^x,$$

ya que

$$B = f^{-1}(]0,2[) \cap g^{-1}(]2,+\infty[).$$

Probaremos ahora que la compacidad y la conexión se conservan por funciones continuas.

Teorema 2.50 (Conservación de la compacidad por continuidad). *Sean E, F espacios métricos, K un subconjunto compacto de E y $f : K \to F$ continua. Entonces $f(K)$ es compacto.*

Demostración:

Sea $\{y_n\}$ una sucesión en $f(K)$. Tomemos una sucesión $\{x_n\}$ en K tal que $f(x_n) = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Al ser K compacto $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in K$. La continuidad de f nos asegura que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, es decir:

$$\{y_{\sigma(n)}\} \to f(x) \in f(K).$$

Hemos probado que $f(K)$ es compacto. ■

Corolario 2.51 (Propiedad de compacidad). *Sean E un espacio métrico, K un subconjunto compacto de E y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f está acotada y alcanza su máximo y su mínimo absolutos.*

Demostración:

$f(K)$ es un compacto de $\mathbb{R}$, luego cerrado y acotado, de donde se deduce fácilmente que el conjunto $f(K)$ tiene máximo y mínimo. ■

El siguiente resultado da condiciones suficientes para que una sucesión de funciones que, en principio, converge sólo puntualmente, converja de hecho uniformemente. La demostración que damos a continuación es un buen ejemplo de utilización del axioma de Heine-Borel.

Teorema 2.52 (Dini). *Sean K un subconjunto compacto de un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente en K a una función continua f. Entonces la convergencia es uniforme en K.*

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada natural n definimos

$$U_n := \{x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

La continuidad de las funciones f_n y f nos permite asegurar que U_n es un abierto relativo de K. La monotonía de la sucesión $\{f_n\}$ nos dice que $\{U_n\}$ es una sucesión creciente de abiertos relativos. La convergencia puntual implica que dicha familia recubre K. Por último, la compacidad de K (axioma de Heine-Borel y la Nota 2.32), nos permite afirmar que existe m natural tal que $K = U_m$, y por tanto:

$$n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in K.$$

■

El siguiente resultado prueba que las funciones continuas definidas en compactos son de hecho uniformemente continuas.

Teorema 2.53 (Heine). *Sean E y F espacios métricos, $K \subset E$ un subconjunto compacto y $f : K \to F$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración:

Notemos por d y ρ las distancias de E y F, respectivamente. Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon_o > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \ \exists x_\delta, y_\delta \in K : \ d(x_\delta, y_\delta) < \ \delta \ \text{ y } \ \rho(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_o.$$

En consecuencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists x_n, y_n \in K : \ d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \ \text{ y } \ \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_o.$$

Como K es compacto, $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \to \ x \in K$. Se tiene, para cada natural n, que

$$d(y_{\sigma(n)}, x) \leq d(y_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{1}{\sigma(n)} + d(x_{\sigma(n)}, x),$$

de donde se deduce que $\{y_{\sigma(n)}\} \to x$. Por último, la continuidad de f nos asegura que

$$\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x) \quad \text{y} \quad \{f(y_{\sigma(n)})\} \to f(x)$$

lo que contradice que $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_o, \ \forall n \in \mathbb{N}$. ■

En el Apéndice D del tema se da otra demostración del Teorema de Heine que usa el Teorema de Heine-Borel-Lebesgue.

Queda claro que, en virtud de la Nota 2.32, en los enunciados del Teorema de Dini y de Heine podemos suponer que K es un espacio métrico compacto (en lugar de un subconjunto compacto de un espacio métrico).

Recordemos que si X e Y son conjuntos, $A, B \subset Y$, y $f : X \to Y$, entonces

$$f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$$

y

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \ , \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Teorema 2.54 (Conservación de la conexión por la continuidad). *Sean E, F dos espacios métricos, C un subconjunto conexo no vacío de E y $f : C \to F$ continua. Entonces $f(C)$ es conexo.*

Demostración:

Sea $f(C) = U \cup V$ una partición de $f(C)$ en abiertos relativos. Si O es un abierto de F tal que $U = O \cap f(C)$, entonces

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(O \cap f(C)) = f^{-1}(O) \cap f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(O) \cap C = f^{-1}(O),$$

lo que prueba que $f^{-1}(U)$ es un abierto relativo de C. Análogamente $f^{-1}(V)$ también es un abierto relativo de C. Así, en vista del comentario anterior al teorema, $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ es una partición de C en abiertos relativos, y al ser C conexo uno de los dos es vacío. Como en este caso, al ser $U, V \subset f(C)$, se verifica que $f(f^{-1}(U)) = U$, $f(f^{-1}(V)) = V$, concluimos que o bien $U = \emptyset$ o bien $V = \emptyset$. Así, la única partición de $f(C)$ en abiertos relativos es la trivial. ∎

La anterior proposición generaliza el teorema del valor intermedio: "*Una función real continua definida en un intervalo si toma dos valores toma todos los intermedios*" ¿Por qué?

Corolario 2.55. *Los segmentos en $\mathbb{R}^N$ son conexos.*

Demostración:

El segmento $[x, y]$ es la imagen del intervalo $[0, 1]$ por la función continua $f(t) = x + t(y - x)$. En general, los segmentos de extremos x e y ($[x, y], [x, y[,]x, y],]x, y[$) son conexos (hágase!). ∎

A continuación mostramos que un conjunto C que verifique la propiedad que aparece en el Teorema 2.54, para cualquier función continua valuada en $\{0, 1\}$, ha de ser conexo. A pesar de la sencillez de la prueba, esta caracterización resulta muy útil para probar ciertas propiedades de estabilidad de los conjuntos conexos.

Proposición 2.56 (Caracterización de la conexión). *Sea C un subconjunto no vacío de un espacio métrico. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) C es conexo.

ii) Toda función continua de C en $\{0, 1\}$ es constante.

Demostración:

$i) \Rightarrow ii)$ Es consecuencia del teorema anterior y de que los únicos intervalos no vacíos contenidos en $\{0,1\}$ son $\{0\}$ y $\{1\}$.

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que C no es conexo. Sea $C = U \cup V$ una partición no trivial de C en abiertos relativos. Entonces la función $f : C \to \{0,1\}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

es continua (por el carácter local de la continuidad), y verifica $f(C) = \{0,1\}$, y por tanto, $ii)$ no es cierta. ∎

Los siguientes resultados nos ayudan a probar la conexión de ciertos subconjuntos.

Proposición 2.57. *Todo conjunto comprendido entre un conexo y su cierre es conexo, es decir si C es conexo y $C \subset D \subset \overline{C}$, entonces D es conexo.*

Demostración:

Si $D = \emptyset$ es claro. Supongamos $D \neq \emptyset$ y sea $f : D \to \{0,1\}$ una aplicación continua. Por ser C conexo, en vista de la Proposición 2.56 ha de ser $f_{|C}$ constante. Como $D \subset \overline{C}$ y f es continua se tiene que

$$f(D) = f(\overline{C} \cap D) \subset \overline{f(C)}.$$

Por tanto, f es constante. ∎

Proposición 2.58. *Sea $\{C_i : \ i \in I\}$ una familia de conexos de un espacio métrico tal que dos cualesquiera tienen intersección no vacía. Entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.*

Demostración:

Sea $f : \bigcup_{\in I} C_i \to \{0,1\}$ continua. Queremos probar que f es constante. Sean $x, y \in \bigcup_{i\in I} C_i$. Existen entonces $r, s \in I$ tales que $x \in C_r$ e $y \in C_s$. Como $f_{|C_r}$ y $f_{|C_s}$ son constantes y existe $c \in C_r \cap C_s$ concluimos que $f(x) = f(c) = f(y)$. ∎

Corolario 2.59. *Todo convexo de $\mathbb{R}^N$ es conexo.*

Demostración:

Sea C un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ y tomemos $c \in C$. Entonces $C = \cup_{x\in C}[c, x]$ es conexo por ser unión de conexos con al menos el punto c en común. ∎

2.5. Límite funcional.

Recordemos que "la" topología de $\mathbb{R}^N$ sigue siendo la topología de la norma.

Definición 2.60. Sean (E,d) un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de E. Se dice que $\alpha \in E$ es un <u>*punto de acumulación*</u> de A si existe una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A distintos de α y convergente a α, equivalentemente, si

$$B(\alpha,\varepsilon) \cap (A \backslash \{\alpha\}) \neq \emptyset, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Denotaremos por A' al conjunto de los puntos de acumulación de A. Se dice que un punto $a \in A$ es un <u>*punto aislado*</u> de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$.

Es inmediato que todo punto adherente a A o es de acumulación de A o es aislado. En consecuencia los puntos de A o son de acumulación o son aislados.

Definición 2.61. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$, α un punto de acumulación de A y $\ell \in F$. Se dice que f tiende a ℓ cuando x tiende a α, y se nota $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \alpha$, si para toda sucesión de puntos de A distintos de α y convergente a α, se verifica que la sucesión imagen converge a ℓ, es decir:

$$[\ \forall \{a_n\} \text{ en } A, a_n \neq \alpha, \{a_n\} \xrightarrow{d} \alpha\ ] \Rightarrow \{f(a_n)\} \xrightarrow{\rho} \ell.$$

Supuesta la existencia de un tal ℓ, de la unicidad del límite secuencial se sigue que tal elemento es único, se llama <u>*límite de la función*</u> f en el punto α y se nota

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell.$$

Como consecuencia inmediata del Ejemplo 2.13, el estudio de la existencia del límite de los campos vectoriales se reduce al de sus campos escalares componentes, tal como se recoge en el siguiente enunciado.

Proposición 2.62 (Reducción a campos escalares). *Sean M,N naturales, $A \subset \mathbb{R}^N$, $f = (f_1,...,f_M) : A \to \mathbb{R}^M$ un campo vectorial en A y α un punto de acumulación de A. Entonces*

$$f \text{ tiene límite en } \alpha \Leftrightarrow f_i \text{ tiene límite en } \alpha, \ \forall i = 1,...,M.$$

En tal caso,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = (\lim_{x\to\alpha} f_1(x),...,\lim_{x\to\alpha} f_M(x)).$$

Proposición 2.63 (Álgebra de límites). *Sean $A \subset \mathbb{R}^N$, α un punto de acumulación de A, $f,g : A \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifica:*

i) Si f, g tienen límite en α, entonces $f+g$ y λf tienen límite en α y

$$\lim_{x\to\alpha}(f+g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x),$$

$$\lim_{x\to\alpha}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to\alpha} f(x).$$

ii) Si f, g tienen límite en α, entonces fg tiene límite en α y

$$\lim_{x\to\alpha}(fg)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \lim_{x\to\alpha} g(x).$$

iii) Si f, g tienen límite en α, $g(x) \neq 0 \ \ \forall x \in A$, y $\lim_{x\to\alpha} g(x) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ tiene límite en α y

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)}.$$

Notas 2.64.

a) Puesto que en los espacios métricos la convergencia secuencial depende sólo de la topología, se tiene que, al igual que ocurría con la continuidad, también el concepto de límite funcional es de carácter topológico: depende de las topologías de los espacios métricos pero no de las métricas concretas que se utilicen.

b) Puede ocurrir que el punto α no pertenezca al conjunto A, pero que sea de acumulación. En el caso en que α pertenezca a A, el valor que tome la función f en α no afecta para nada a la existencia del límite, ni al valor de éste.

c) Nótese que, en la Definición 2.61, basta exigir la condición

$$[\ \forall\{a_n\} \text{ en } A, a_n \neq \alpha, \{a_n\} \xrightarrow{d} \alpha\ ] \Rightarrow \{f(a_n)\} \text{ es convergente.}$$

En efecto, si $\{a_n\}$ y $\{a_n^{'}\}$ son dos sucesiones que verifican la hipótesis anterior, entonces la sucesión "mezcla" $\{a_1, a_1^{'}, a_2, a_2^{'}, \ldots, a_n, a_n^{'}, \ldots\}$ está en las mismas circunstancias, y por tanto, la sucesión imagen

$$\{f(a_1), f(a_1^{'}), f(a_2), f(a_2^{'}), \ldots, f(a_n), f(a_n^{'}), \ldots\}$$

es convergente, lo que conlleva a que

$$\lim\ f(a_n) = \lim\ f(a_n^{'}).$$

La relación entre la continuidad de una función en un punto y la existencia de límite funcional en dicho punto se recoge en el siguiente resultado:

Proposición 2.65. *Sean E, F espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y a un punto de A.*

i) Si a es un punto aislado de A, entonces f es continua en a.

ii) Si a es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a si, y sólo si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La demostración se deja como ejercicio.

El siguiente resultado recoge el utilísimo proceso de cambio a coordenadas polares a la hora de estudiar límites de funciones de dos variables reales. Claramente, vía el uso de traslaciones, no es restrictivo el llevar a cabo el estudio del límite en el punto $(0,0)$.

Recordemos que la función paso a coordenadas polares es la función de $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$(\rho, \vartheta) \to (\rho\ cos\ \vartheta, \rho\ \text{sen}\ \vartheta),$$

que es una aplicación sobreyectiva, aplica el eje $\{0\} \times \mathbb{R}$ en $(0,0)$, y que es periódica de periodo 2π en la variable ϑ. En consecuencia, esta aplicación induce una biyección de la franja $\mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En efecto: dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existe un único $(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$ tal que

$$x = \rho\ cos\ \vartheta\ , y = \rho\ \text{sen}\ \vartheta.$$

De hecho, ρ y ϑ son el módulo y el "argumento principal" de (x,y), y (ρ, ϑ) se pueden obtener a a partir de (x,y) mediante las expresiones $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y

$$\vartheta = \begin{cases} \pi & \text{si } x \in \mathbb{R}^-, y = 0 \\ 2\ \arctan \frac{y}{\rho + x} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Al par (ρ, ϑ) se le llama <u>*coordenadas polares*</u> del punto (x,y).

Proposición 2.66 (coordenadas polares). *Sean $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una función y ℓ un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$.

iii) $\lim_{\rho \to 0} f(\rho\ cos\ \vartheta, \rho\ \text{sen}\ \vartheta) = \ell$ *uniformemente en ϑ, es decir:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \rho < \delta, \vartheta \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(\rho\ cos\ \vartheta, \rho\ \text{sen}\ \vartheta) - \ell| < \varepsilon.$$

iv) Para cualquier sucesión $\{\rho_n\}$ de positivos convergente a cero y cualquier sucesión de reales $\{\vartheta_n\}$ (si queremos $|\vartheta_n| \le \pi$), se verifica que

$$\{f(\rho_n\ cos\ \vartheta_n, \rho_n\ \text{sen}\ \vartheta_n)\} \to \ell.$$

Demostración:

$i) \Rightarrow ii)$ Se deja como ejercicio (véase la $\varepsilon - \delta$-caracterización de la continuidad).

$ii) \Rightarrow iii)$. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Por hipótesis

$$\exists \delta > 0 : 0 < \|(x,y)\|_2 < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon.$$

Ahora, si ρ es tal que $0 < \rho < \delta$, entonces para todo real ϑ se verifica que

$$\|(\rho \; cos \; \vartheta, \rho \; \text{sen} \; \vartheta)\|_2 = \rho < \delta,$$

luego se tiene que

$$|f(\rho \; cos \; \vartheta, \rho \; \text{sen} \; \vartheta) - \ell| < \varepsilon.$$

$iii) \Rightarrow iv)$ Sean $\{\rho_n\}$ una sucesión de números reales positivos convergente a cero y $\{\vartheta_n\}$ una sucesión de números reales. Para $\varepsilon > 0$ fijo, por hipótesis

$$\exists \delta > 0 : (0 < \rho < \delta, \vartheta \in \mathbb{R}) \Rightarrow |f(\rho \; cos \; \vartheta, \rho \; \text{sen} \; \vartheta) - \ell| < \varepsilon.$$

Como $\{\rho_n\} \to 0$, entonces

$$\exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geq m \Rightarrow 0 < \rho_n < \delta,$$

y por tanto, en vista de la hipótesis

$$n \geq m \;\; \Rightarrow \;\; |f(\rho_n \; cos \; \vartheta_n, \rho_n \; \text{sen} \; \vartheta_n) - \ell| < \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$\{f(\rho_n \; cos \; \vartheta_n, \rho_n \; \text{sen} \; \vartheta_n)\} \to \ell.$$

$iv) \Rightarrow i)$ Sea $\{(x_n, y_n)\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ convergente a $(0,0)$. Para cada natural n tomemos $\rho_n := \|(x_n, y_n)\|_2$ y $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n = \rho_n \; cos \; \vartheta_n \; , y_n = \rho_n \; \text{sen} \; \vartheta_n.$$

De la continuidad de la norma se sigue que $\{\rho_n\} \to 0$, y por tanto por $iv)$

$$\{f(x_n, y_n)\} = \{f(\rho_n \; cos \; \vartheta_n, \rho_n \; \text{sen} \; \vartheta_n)\} \to \ell.$$

■

Corolario 2.67 (Límites direccionales). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \to \mathbb{R}$. Si existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ entonces, para todo $\vartheta \in]-\pi, \pi]$ existe*

$$\lim_{\rho \to 0} f(a + \rho \; cos \; \vartheta, b + \rho \; \text{sen} \; \vartheta) = \ell.$$

Los anteriores límites se llaman límites direccionales en la dirección ϑ.

En consecuencia, de existir límite han de existir todos los límites direccionales y ser iguales al límite.

En la práctica es usual para calcular los límites direccionales de $f(x,y)$ en el punto (a,b), considerar las rectas $y = b + m(x-a)$ (de pendiente m y que pasa por (a,b)) y hallar el límite

$$\lim_{x\to a} f(x, b + m(x-a)).$$

Obsérvese que de no existir un límite direccional o en el caso de que dos límites direccionales sean distintos podemos afirmar que no hay límite. Supuesto que todos los límites direccionales existen y son iguales, éste es el candidato a límite, aunque puede que no haya límite (véase Ejercicio 2.27, g).

2.6. Apéndice.

2.6.1. A) Teorema de Heine-Borel-Lebesque.

Teorema de Heine-Borel-Lebesgue. *Sea K un subconjunto de un espacio métrico. Equivalen:*

i) *K es compacto, esto es, toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial convergente a un punto de K.*

ii) *K verifica el axioma de Heine-Borel : todo recubrimiento por abiertos de K admite un subrecubrimiento finito, esto es, si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos de E tales que $K \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.*

En la demostración del teorema anterior usaremos los dos siguientes resultados auxiliares, de interés en sí mismos:

Proposición 2.68. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de un espacio métrico E y $x \in E$. Son equivalentes:*

a) *La sucesión $\{x_n\}$ admite una parcial convergente a x.*

b) *Para cada positivo ε, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon)\}$ es infinito.*

Demostración:

Por definición de convergencia es claro que $a) \Rightarrow b)$.

$b) \Rightarrow a)$ Supongamos $b)$ cierto y definamos $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$\sigma(1) = \min\,\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, 1)\}.$$

Supuesto definido $\sigma(k)$, para $k \leq n$, definimos

$$\sigma(n+1) = \min\left\{m \in \mathbb{N} : m > \sigma(n), x_m \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)\right\}.$$

Así conseguimos una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que, por la forma de construirla, claramente converge a x. ■

Lema 2.69 (del número de Lebesgue). *Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico. Entonces para todo recubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de K existe $r > 0$ tal que*

$$x \in K \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U} : B(x, r) \subset U.$$

En tal caso se dice que r es un número de Lebesgue asociado al recubrimiento $\mathcal{U}$.

Demostración:

Si no existiera un número de Lebesgue, entonces habría un recubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de K tal que

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\exists x_n \in K : B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subsetneq U,\ \forall U \in \mathcal{U}\right).$$

Por hipótesis $\{x_n\}$ admite una parcial convergente a un elemento x de K. Por tanto, ha de existir un conjunto $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, y, por ser este conjunto abierto, para algún positivo ρ se verifica $B(x, \rho) \subset U$. Ahora, elegimos $\frac{1}{N} < \frac{\rho}{2}$, y sabemos que existe $n > N$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\rho}{2}$. Entonces, si $y \in B(x_n, \frac{\rho}{2})$, se tiene

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \rho.$$

Así

$$B\left(x_n, \frac{\rho}{2}\right) \subset B(x, \rho) \subset U.$$

Como $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\rho}{2}$, obtenemos que $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, \frac{\rho}{2}) \subset U$, lo que contradice la elección de x_n. ■

Demostración del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Probamos primero que dado un positivo ε, existe un subconjunto finito $F \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$. De no ser así, tomemos

$$x_1 \in K, \qquad x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon),$$

y en general,

$$x_{n+1} \in K \setminus \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Obtendríamos así una sucesión en K verificando que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ si $n \neq m$, o sea $\{x_n\}$ es una sucesión sin parciales convergentes (pues ni siquiera pueden ser de Cauchy), lo que contradice la hipótesis.

Ahora probamos que K verifica el axioma de Heine-Borel. Fijamos un recubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de K. Sea r un número de Lebesgue asociado al recubrimiento. Sabemos que existe un conjunto finito $F \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{x \in F} B(x, r)$. Ahora bien, cada una de las bolas anteriores está contenida en algún abierto del recubrimiento por ser r un numero de Lebesgue, por tanto, éste admite un subrecubrimiento finito, como queríamos demostrar.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $\{x_n\}$ una sucesión en K y supongamos que no admite ninguna parcial convergente a ningún elemento de K. Por la Proposición 2.68, ha de ocurrir

$$y \in K \Rightarrow \exists r_y > 0 : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(y, r_y)\} \text{ es finito.}$$

Como la familia de conjuntos

$$\{B(y, r_y) : y \in K\}$$

es un recubrimiento por abiertos de K, por hipótesis, deben de existir elementos $y_1, \cdots, y_m$ tales que

$$K \subset B(y_1, r_{y_1}) \cup \cdots \cup B(y_m, r_{y_m}),$$

lo cual es una contradicción, ya que en tal caso

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\} \subset \left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, r_{y_j})\right\}$$

sería finito, ya que cada una de las bolas $B(y_i, r_{y_i})$ cuya unión recubre K contiene a un número finito de términos de la sucesión.

$\blacksquare$

2.6.2. B) Desigualdad entre la media geométrica y aritmética.

Proposición. *Sea n un natural mayor o igual que 2. Entonces*

$$0 \le a_1, a_2, ..., a_n \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

y la igualdad ocurre si, y sólo si, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Demostración:

Si alguno de los a_i es nulo la proposición es inmediata. También es inmediato que si todos los a_i son iguales se da la igualdad. Queda así reducida la demostración a probar la siguiente implicación:

$$[\ 0 < a_1, a_2, ..., a_n,\ a_1 < a_2\ ] \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

que a su vez se deduce de probar

$$[\ 0 < x_1, x_2, ..., x_n,\ x_1 x_2 ... x_n = 1,\ x_1 < 1 < x_2\ ] \Rightarrow n < x_1 + x_2 + ... + x_n \qquad (*)$$

(basta aplicar (*) a los números $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}, i = 1, 2, ..., n$). Vamos a demostrar (*) por inducción.

Comprobemos la implicación para $n = 2$.

$$x_1 < 1 < x_2 \ \Rightarrow \ (1 - x_1)(1 - x_2) < 0 \ \Leftrightarrow \ 1 + x_1 x_2 < x_1 + x_2 \ \Rightarrow \ 2 < x_1 + x_2.$$

Supongamos (*) cierta para n y probémosla para $n + 1$. Sean

$$0 < x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1},\ x_1 x_2 ... x_n x_{n+1} = 1,\ x_1 < 1 < x_2$$

y consideremos los siguientes n números $(x_1 x_2), x_3, ..., x_n, x_{n+1}$. Es claro que todos son positivos y su producto vale 1. Tanto si todos son iguales (en cuyo caso son todos iguales a 1) como si no (en cuyo caso aplicamos la hipótesis de inducción) tenemos que

$$n \le x_1 x_2 + x_3 + ... + x_n + x_{n+1}$$

y por tanto (usando la desigualdad $1 + x_1 x_2 < x_1 + x_2$ vista en la prueba para $n = 2$) concluimos que

$$\begin{aligned} n + 1 \le x_1 x_2 + x_3 + ... + x_n + x_{n+1} + 1 = \\ = (1 + x_1 x_2) + x_3 + ... + x_n + x_{n+1} < \\ < x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n + x_{n+1}. \end{aligned}$$

■

2.6.3. C) Demostración de la caracterización de la continuidad global.

Demostración de la Proposición 2.47.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sea $O \subset F$ abierto. Si $f^{-1}(O)$ es vacío no hay nada que demostrar. En otro caso sea $a \in f^{-1}(O)$ fijo. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a), \varepsilon) \subset O$. La hipótesis nos asegura la existencia de un positivo δ_a tal que

$$f(B(a, \delta_a) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon),$$

y en consecuencia

$$B(a, \delta_a) \cap A \subset f^{-1}(O).$$

Hemos probado que $f^{-1}(O)$ contiene la intersección de A con una bola centrada en cada uno de sus puntos, luego $f^{-1}(O)$ es un abierto relativo de A.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Si C es un cerrado de F, entonces

$$A \backslash f^{-1}(C) = f^{-1}(F \backslash C)$$

es un abierto relativo de A, y por tanto $f^{-1}(C)$ es un cerrado relativo de A.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Sea $B \subset A$. Por hipótesis, $f^{-1}\left(\overline{f(B)}\right)$ es un cerrado relativo de A que, evidentemente, contiene a B, por tanto, ha de contener al cierre de B en la topología relativa a A, esto es,

$$\overline{B} \cap A \subset f^{-1}\left(\overline{f(B)}\right).$$

Aplicando f obtenemos $f(\overline{B} \cap A) \subset \overline{f(B)}$.

iv) $\Rightarrow$ *i)* Si no ocurre *i)*, entonces

$$\exists a \in A, \exists \varepsilon_0 > 0 : \ \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in A \text{ verificando } \left\{ \begin{array}{l} d(x_\delta, a) < \delta \\ \rho(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon_0 \end{array} \right.$$

y por tanto $B := \{x_\delta : \delta > 0\}$ es un subconjunto de A tal que $a \in \overline{B}$ y $f(a) \notin \overline{f(B)}$, y en consecuencia no se verifica *iv)*. ∎

2.6.4. D) Otra demostración del Teorema de Heine.

Muchas veces la compacidad se usa para "uniformizar" una condición que a priori no parece ser uniforme. Como muestra de esta idea, daremos una nueva demostración del Teorema de Heine, que es directa.

Teorema de Heine. *Sea F un espacio métrico, K un espacio métrico compacto y $f : K \to F$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Notemos por d y ρ las distancias de K y F, respectivamente. Por la ε-δ-caracterización de continuidad, dado un positivo ε, para cada punto x de K existe un positivo $\delta(x)$ tal que

$$y \in K, d(y,x) < \delta(x) \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

Ahora, variando el punto x, recubrimos el compacto por una unión de abiertos, sin más que considerar

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{\delta(x)}{2}\right).$$

Por ser K compacto, se tiene que, en vista del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue, podemos obtener un subrecubrimiento finito. Esto es, existen elementos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$ tales que

$$(\star) \qquad K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_i}{2}\right),$$

donde hemos notado por δ_i a los positivos que verifican la condición de continuidad en el punto x_i.

Tomamos $\delta = \min\{\frac{\delta_i}{2} : 1 \leq i \leq n\}$ y si $x, y \in K$ verifican que $d(x,y) < \delta$, entonces, por $(\star)$, se verifica que, para algún i se tiene $x \in B\left(x_i, \frac{\delta_i}{2}\right)$, por tanto, como $\delta \leq \delta_i$ obtenemos que $x, y \in B(x_i, \delta_i)$ y usando la continuidad de f en x_i se tiene que

$$\rho(f(x), f(x_i)) < \varepsilon, \ \rho(f(y), f(x_i)) < \varepsilon.$$

Finalmente, usando la desigualdad triangular se deduce que

$$\rho(f(y), f(x)) < 2\varepsilon.$$

∎

2.6.5. E) Fórmula para el argumento de un número complejo.

Proposición. *Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, si definimos ϑ por*

$$\begin{cases} \vartheta = 2\arctan \frac{y}{x+|z|} & \text{si} \quad z \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^- \\ \vartheta = \pi & \text{si} \quad z \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

entonces ϑ es el único número real en $]-\pi, \pi]$ que verifica que

$$z = |z|\ (\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta).$$

Demostración. Supuesto que existan dos elementos ϑ, ϑ_0 que verifiquen lo anterior, entonces, se tendría que

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0, \qquad \operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{sen}\vartheta_0,$$

por tanto,

$$\cos(\vartheta - \vartheta_0) = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta_0 = 1,$$

de donde $\vartheta - \vartheta_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ y como $\vartheta, \vartheta_0 \in]-\pi, \pi]$, entonces $\vartheta = \vartheta_0$.

Comprobamos ahora la existencia y únicamente lo hacemos en el caso de que $z \in \mathbb{C}^* \backslash \{\mathbb{R}^-\}$. Tomamos

$$\vartheta = 2\arctan\frac{y}{x+|z|},$$

por tanto $\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{y}{x+|z|}$, de donde

$$\cos\vartheta = \cos^2\frac{\vartheta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}} =$$

$$= \frac{(x+|z|)^2 - y^2}{(x+|z|)^2 + y^2} = \frac{x^2 + x^2 + y^2 + 2|z|x - y^2}{x^2 + y^2 + |z|^2 + 2x|z|} = \frac{2x(x+|z|)}{2|z|(|z|+x)} = \frac{x}{|z|}.$$

Análogamente se tiene

$$\operatorname{sen}\vartheta = 2\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{2\tan\frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}} =$$

$$= \frac{2\frac{y}{x+|z|}}{\frac{y^2}{(x+|z|)^2} + 1} = \frac{2y(x+|z|)}{y^2 + (x+|z|)^2} =$$

$$\frac{2y(x+|z|)}{y^2 + x^2 + x^2 + y^2 + 2x|z|} = \frac{2y(x+|z|)}{2|z|(|z|+x)} = \frac{y}{|z|}.$$

■

Dado $z \in \mathbb{C}^*$ se llama <u>*argumento*</u> de z a todo número real t que verifique la igualdad $z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)$.

2.7. Referencias recomendadas.

[Ber], [Bra], [Bri], [Cra], [FeVicd], [Jur], [MaHo], [Ney] y [Stro].

2.8. Resumen de resultados del Tema 2.

Espacio normado. Si X es un espacio vectorial real, una *norma* en X es una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ verificando

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in X$ (homogeneidad).

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$ (desigualdad triangular).

El par ordenado $(X, \|\cdot\|)$ se llama espacio normado.

Espacio métrico. Una distancia (o métrica) definida en un conjunto no vacío E es una función $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in E$ (propiedad simétrica).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \ \forall x, y, z \in E$ (desigualdad triangular).

Al par ordenado (E, d) se le denomina espacio métrico.

Topología de un espacio métrico. Sea (E, d) un espacio métrico.
Dado $a \in E, r \geq 0$, la bola abierta (resp. cerrada) de centro a y radio r son los conjuntos dados por

$$B(a, r) := \{x \in E : d(x, a) < r\}, \quad \overline{B}(a, r) := \{x \in E : d(x, a) \leq r\}.$$

La *esfera* de centro a y radio r es el conjunto $S(a, r) := \{x \in E : d(x, a) = r\}$.
Un subconjunto O de un espacio métrico (E, d) se dice abierto si verifica:

$$\forall a \in O, \exists r > 0 : B(a, r) \subset O.$$

Así pues, un subconjunto es abierto si puede expresarse como unión de bolas abiertas.
Todo espacio normado es un espacio topológico con la topología asociada a la distancia definida por $d(x, y) := \|x - y\|$.

Convergencia. Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico (E, d) es convergente a x si $\{d(x_n, x)\} \to 0$. El concepto de convergencia es topológico, esto es, si en un espacio E dos distancias d y d^* generan la misma topología, entonces las sucesiones convergentes en (E, d) y en (E, d^*) son las mismas (y además tienen los mismos límites).
La convergencia en el espacio normado $(\mathcal{C}[a, b], \|.\|_\infty)$ se llama convergencia uniforme, esto es,

$$\{f_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \Leftrightarrow [\ \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in [a, b]\ ].$$

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico (E,d) es de Cauchy si se verifica

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} : p,q \geq m \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco no es cierto. Aquellos espacios métricos que verifican que toda sucesión de Cauchy es convergente se llaman completos. Un espacio normado y completo para la métrica asociada a la norma es un espacio de Banach.

Normas equivalentes. Dos normas $\|\cdot\|$ y $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ en un mismo espacio vectorial X se dicen equivalentes si existen constantes $m, M > 0$ verificando

$$m\|x\| \leq |\!|\!| x |\!|\!| \leq M\|x\|,\ \forall x \in X,$$

equivalentemente, (Proposición 2.20) si ambas normas generan la misma topología.

Teorema de Hausdorff. *Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.*

Como consecuencia, existe una única topología en $\mathbb{R}^N$ que proceda de una norma, a la que llamamos topología de la norma en $\mathbb{R}^N$. Los abiertos en $\mathbb{R}^N$ son las uniones de bolas abiertas para cualquier norma.

Teorema de complitud. *En $\mathbb{R}^N$, toda sucesión de Cauchy es convergente, esto es, $\mathbb{R}^N$ es un espacio de Banach con cualquier norma.*

Conjunto acotado. Un subconjunto A de un espacio métrico (E,d) se dice acotado si $A \subset B(x_0, M)$ para convenientes $x_0 \in E$, $M > 0$.

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *$\mathbb{R}^N$ verifica la propiedad de Bolzano-Weierstrass, es decir, toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^N$ admite una parcial convergente.*

Compactos. En $\mathbb{R}^N$ los subconjuntos cerrados y acotados se llaman compactos.

Los compactos de $\mathbb{R}^N$ se caracterizan como aquellos subconjuntos K en los que toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial convergente a un punto de K (Teorema 2.28). Esta caracterización es la que se toma como definición de compacto en un espacio métrico.

En un espacio métrico el **Teorema de Heine-Borel-Lebesgue** afirma que un subconjunto K es compacto si, y sólo si, verifica el axioma de Heine-Borel: todo recubrimiento por abiertos de K admite un subrecubrimiento finito, esto es, si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos de E tales que $K \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Esta caracterización es la que se toma como definición de compacto en un espacio topológico.

En general, si A es un subconjunto de un espacio métrico (E,d), los abiertos de A o abiertos relativos son las intersecciones de los abiertos de E con A. A dicha topología en A se le llama la topología inducida.

Nota: La compacidad de un subconjunto K de un espacio topológico es una propiedad intrínseca del espacio topológico (K, topología inducida).

Convexos. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ es convexo si

$$[a,b] := \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\} \subset A, \ \forall a, b \in A.$$

Conexos. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^N$ es conexo si verifica que la única partición de C en dos abiertos relativos es la trivial. Todo convexo de $\mathbb{R}^N$ es conexo.

Función continua. Sean $(E,d),(F,\rho)$ espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $a \in A$. Se dice que la función f es continua en el punto a si

$$\left[\forall \{a_n\} \text{ en } A, \{a_n\} \xrightarrow{d} a\right] \Rightarrow \{f(a_n)\} \xrightarrow{\rho} f(a)$$

El concepto de continuidad entre espacios métricos es topológico.

El estudio de la continuidad de los campos vectoriales se reduce al de sus campos escalares componentes: Si $f = (f_1, \ldots, f_M) : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es un campo vectorial y a es un punto de A, entonces

$$f \text{ es continuo en } a \Leftrightarrow f_i \text{ es continuo en } a, \ \forall i = 1, ..., M.$$

Regla de la cadena para funciones continuas. *Sean E_1, E_2, E_3 espacios métricos, $A \subset E_1$, $f : A \to E_2$, $B \subset E_2$, $g : B \to E_3$ y supongamos que $f(A) \subset B$. Si f es continua en un punto a de A y g es continua en $f(a)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a. Como consecuencia, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.*

Álgebra de las funciones continuas. *Sean (E,d) un espacio métrico, $(X, \|.\|)$ un espacio normado y $a \in A \subset E$.*

i) Si $f, g : A \to X$ son continuas en a y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y λf son continuas en a.

ii) Si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to X$ son continuas en a, entonces fg es continua en a.

iii) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en a y $f(x) \neq 0, \ \forall x \in A$, entonces $\frac{1}{f}$ es continua en a.

iv) Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son continuas en a y $g(x) \neq 0, \ \forall x \in A$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Carácter local de la continuidad. *Sean E, F espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $b \in B \subset A$. Si B es un "entorno relativo" de b (existe $r > 0$ tal que $B(b,r) \cap A \subset B$) y $f_{|B}$ es continua en b, entonces f es continua en b. En particular, si $f : E \to F$, $B \subset E$ es abierto y si $f_{|B}$ es continua, entonces f es continua en B.*

$\varepsilon - \delta$**-caracterización de la continuidad**. *Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $a \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) f es continua en a.

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ d(x,a) < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow\ \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$, *equivalentemente,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ f(B(a,\delta) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

Como consecuencia de la caracterización de la continuidad global (Proposición 2.47) se tiene:

Sean (E,d) *un espacio métrico y* $f : E \to \mathbb{R}$ *una aplicación continua. Denotemos por* $\Im$ *(resp.* $\mathcal{F}$*) la familia de los abiertos (resp. cerrados) de* E*. Entonces para todo* $a \in \mathbb{R}$ *se tiene que:*

i) $\{x \in E : f(x) < a\} \in \Im$.

ii) $\{x \in E : f(x) > a\} \in \Im$.

iii) $\{x \in E : f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$.

iv) $\{x \in E : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$.

v) $\{x \in E : f(x) = a\} \in \mathcal{F}$.

Los compactos se conservan por funciones continuas (Teorema 2.50) y, como consecuencia las funciones continuas en un compacto valuadas en $\mathbb{R}$ alcanzan su mínimo y su máximo absolutos (Propiedad de compacidad: Corolario 2.51). Asimismo, los conexos se conservan por funciones continuas (Teorema 2.54).

Teorema de Dini. *Sean* K *un subconjunto compacto de un espacio métrico y* $\{f_n\}$ *una sucesión monótona de funciones continuas de* K *en* $\mathbb{R}$ *que converge puntualmente en* K *a una función continua* f*. Entonces la convergencia es uniforme en* K*.*

Continuidad uniforme. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$ una función. Se dice que f es <u>uniformemente continua</u> si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : [x, y \in A, d(x,y) < \delta] \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Teorema de Heine. *Sean* E *y* F *espacios métricos,* $K \subset E$ *compacto y* $f : K \to F$ *una función continua. Entonces* f *es uniformemente continua.*

Límite funcional. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$, α un punto de acumulación de A y $\ell \in F$. Se dice que ℓ es el límite de f en α (o que f tiende a ℓ cuando x tiende a α, y se nota $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \alpha$), si

$$[\ \forall \{a_n\} \text{ en } A, a_n \neq \alpha, \{a_n\} \xrightarrow{d} \alpha\ ] \Rightarrow \{f(a_n)\} \xrightarrow{\rho} \ell.$$

El concepto de límite funcional entre espacios métricos es también topológico.

Reducción a campos escalares. *Sean M, N naturales, $A \subset \mathbb{R}^N$, $f = (f_1, ..., f_M) : A \to \mathbb{R}^M$ un campo vectorial en A y α un punto de acumulación de A. Entonces*

$$f \text{ tiene límite en } \alpha \Leftrightarrow f_i \text{ tiene límite en } \alpha,\ \forall i = 1, ..., M.$$

En tal caso,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = (\lim_{x\to\alpha} f_1(x), ..., \lim_{x\to\alpha} f_M(x)).$$

Álgebra de límites. *Sean $A \subset \mathbb{R}^N$, α un punto de acumulación de A, $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifica:*

i) Si f, g tienen límite en α, entonces $f + g$ y λf tienen límite en α y

$$\lim_{x\to\alpha}(f + g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x),$$

$$\lim_{x\to\alpha}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to\alpha} f(x).$$

ii) Si f, g tienen límite en α, entonces fg tiene límite en α y

$$\lim_{x\to\alpha}(fg)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \lim_{x\to\alpha} g(x).$$

iii) Si f, g tienen límite en α, $g(x) \neq 0\ \forall x \in A$, y $\lim_{x\to\alpha} g(x) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ tiene límite en α y

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)}.$$

Relación entre límite funcional y continuidad. *Sean E, F espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y a un punto de A.*

i) Si a es un punto aislado de A, entonces f es continua en a.

ii) Si a es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a si, y sólo si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Coordenadas polares. *Existe una biyección de $\mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi]$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Esto es, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ existe un único $(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi]$ tal que*

$$x = \rho \cos \vartheta\ , y = \rho \operatorname{sen} \vartheta.$$

Al par (ρ, ϑ) se le llama <u>coordenadas polares</u> del punto (x, y).

Proposición (coordenadas polares). *Sean $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ una función y ℓ un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \ell$.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|(x, y)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$.

iii) $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\ cos\ \vartheta, \rho\ \text{ sen }\ \vartheta) = \ell$ *uniformemente en* ϑ*, es decir:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \rho < \delta, \vartheta \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(\rho\ cos\ \vartheta, \rho\ \text{ sen }\ \vartheta) - \ell| < \varepsilon.$$

iv) *Para cualquier sucesión* $\{\rho_n\}$ *de positivos convergente a cero y cualquier sucesión de reales* $\{\vartheta_n\}$ *(si queremos* $|\vartheta_n| \leq \pi$*), se verifica que*

$$\{f(\rho_n\ cos\ \vartheta_n, \rho_n\ \text{ sen }\ \vartheta_n)\} \to \ell.$$

Límites direccionales. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \to \mathbb{R}$*. Si existe* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ *entonces, para todo* $\vartheta \in]-\pi, \pi]$ *existe*

$$\lim_{\rho\to 0} f(a + \rho\ cos\ \vartheta, b + \rho\ \text{ sen }\ \vartheta) = \ell.$$

Los anteriores límites se llaman límites direccionales en la dirección ϑ*.*

En consecuencia, de existir límite han de existir todos los límites direccionales y ser iguales al límite.