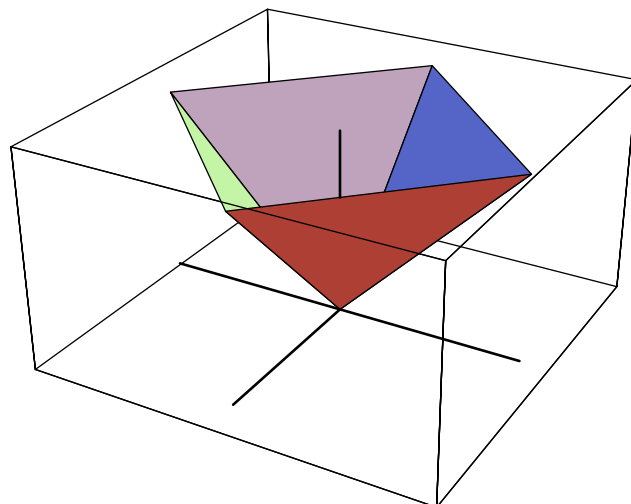
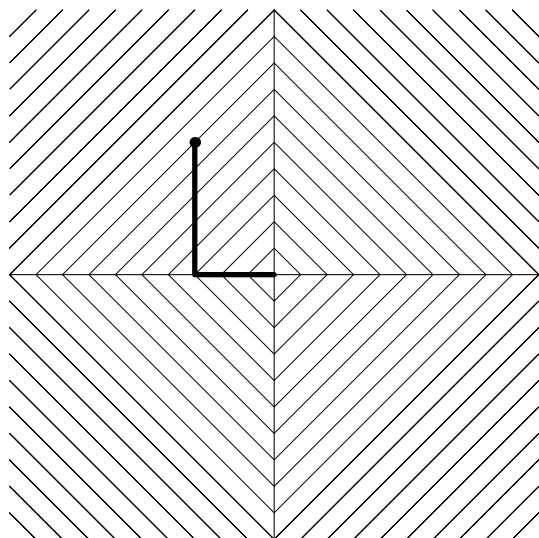


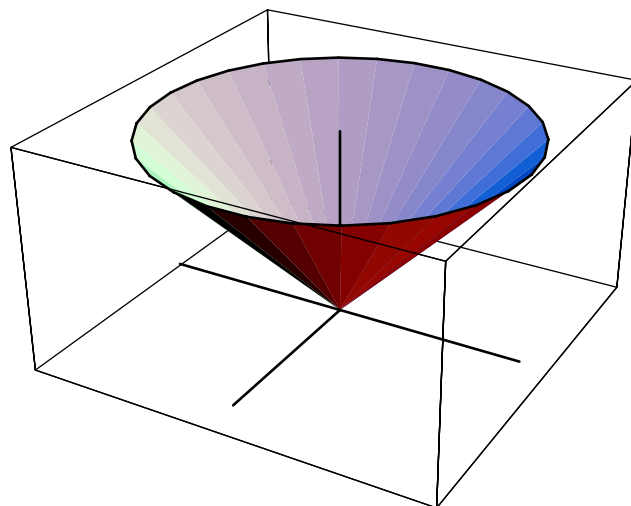
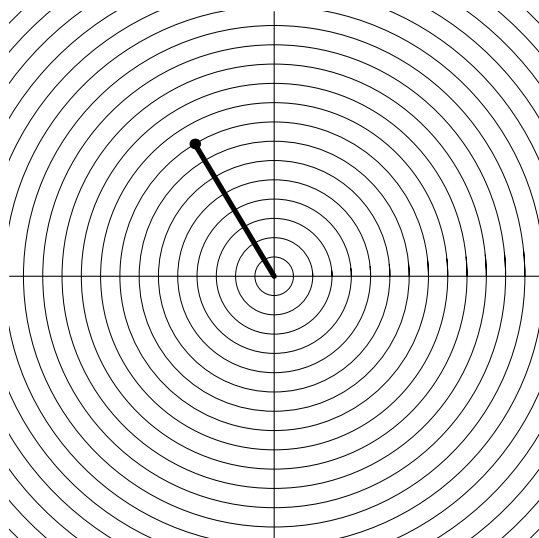
Norme nel Piano



Data la norma in \mathbb{R}^2 definita da

$$\|(x, y)\|_1 := |x| + |y| \quad \text{per } x, y \in \mathbb{R},$$

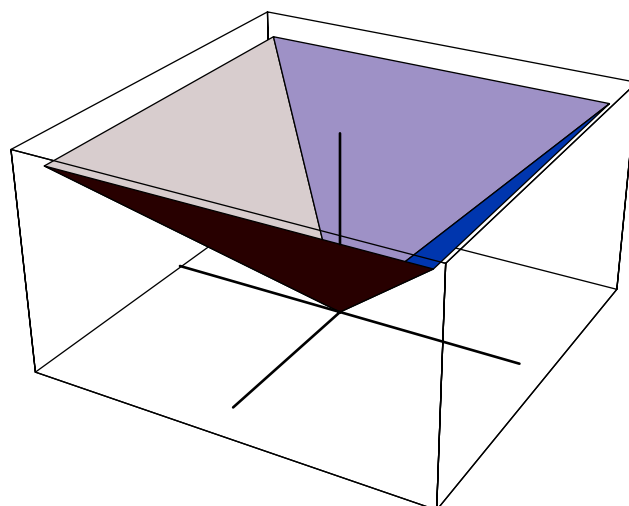
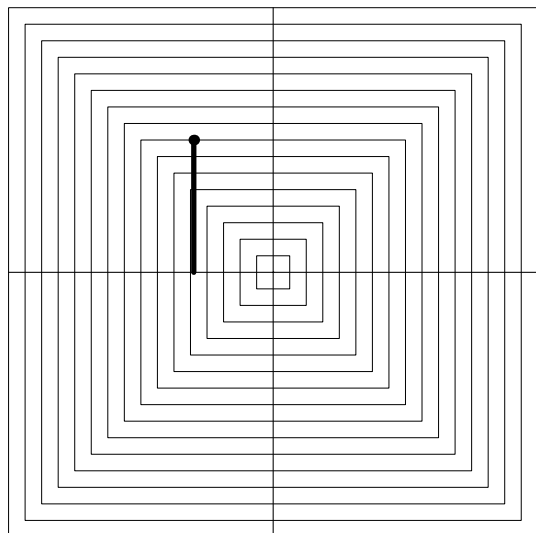
la figura in alto a sinistra mostra gli insiemi di livello e la figura a destra un grafico tridimensionale. La distanza di un punto (x, y) dall'origine è la somma delle distanze (classiche, prese in perpendicolare) del punto dai due assi cartesiani. Agli abitanti di città come Manhattan, disegnate a griglia ortogonale, capita di dover calcolare le distanze in questo modo.



Le seconde due figure sono le curve di livello e il grafico tridimensionale della classica norma euclidea nel piano

$$\|(x, y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{per } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si tratta della distanza “in linea d’aria”. Andrebbe bene in un deserto completamente piatto, in cui tutte le direzioni fossero ugualmente faticose.



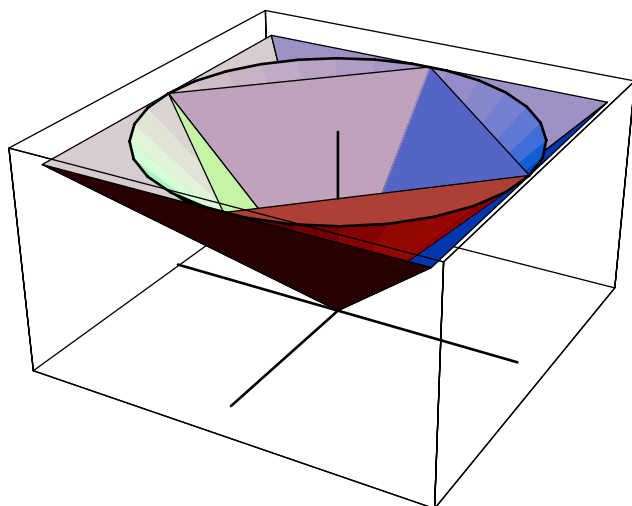
Qui sopra è illustrata la terza norma più usata in \mathbb{R}^2 :

$$\|(x, y)\|_{\infty} := \max\{|x|, |y|\} \quad \text{per } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bisogna arrampicarsi su uno specchio per trovare una situazione in cui questa terza norma possa significare qualcosa. Per esempio si potrebbe pensare a un osservatore che non possa muoversi che sui due assi. Allora la norma di un punto è la distanza che deve fare l'osservatore per avvicinarsi il più possibile al punto, tenendosi sugli assi.

I grafici tridimensionali delle tre norme, quando sovrapposti, illustrano le disuguaglianze

$$\|(x, y)\|_{\infty} \leq \|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1,$$



la prima delle quali è ovvia, mentre la seconda riflette il teorema euclideo secondo cui la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Altre disuguaglianze importanti sono

$$\|(x, y)\|_1 \leq \sqrt{2} \|(x, y)\|_2 \leq 2 \|(x, y)\|_{\infty}.$$

La prima deriva interpretando $|x| + |y|$ come il prodotto scalare canonico fra $(|x|, |y|)$ e $(1, 1)$ e applicando la disuguaglianza di Schwarz; per la seconda, se $|x| \geq |y|$ si ha

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}|x|,$$

e basta osservare che il primo membro è la norma $\|(x, y)\|_2$ mentre l'ultimo è $\sqrt{2}\|(x, y)\|_{\infty}$. Se $|x| \leq |y|$ i conti sono analoghi.

Esercizio. Le norme e le seminorme sono funzioni convesse, cioè $\|\theta x + (1 - \theta)y\| \leq \theta\|x\| + (1 - \theta)\|y\|$ se $x, y \in X$, $\theta \in [0, 1]$.

Esercizio. Sia X uno spazio vettoriale reale. La somma e il massimo di due seminorme su X sono ancora seminorme su X . Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, allora $x \mapsto |f(x)|$ è una seminorma. Se $A: X \rightarrow Y$ è lineare e $v \mapsto \|v\|$ è una norma su Y , allora $x \mapsto \|Ax\|$ è una seminorma su X , ed è una norma se e solo se A è iniettiva.

Esercizio. La funzione $(x, y) \mapsto \max\{|x+y|, |x-y|\}$ è una seminorma o una norma su \mathbb{R}^2 ? Che disuguaglianze la legano alle norme $\|v\|_1$, $\|v\|_2$, $\|v\|_\infty$?

Esercizio. Data una seminorma $\|\cdot\|$ e un $c > 0$ l'insieme di livello $\{x \in X : \|x\| = c\}$ è simmetrico rispetto all'origine (cioè x gli appartiene se e solo se $-x$ gli appartiene). Gli insiemi di livello c_1 e c_2 sono omotetici fra loro.

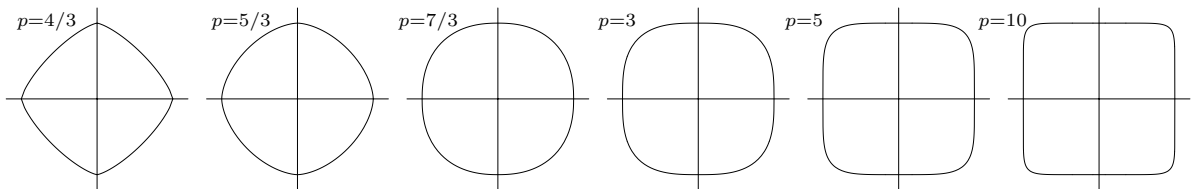
Esercizio. La funzione $(x, y) \mapsto \max\{x+y, y-x, -y\}$ è una norma in \mathbb{R}^2 ? Come sono i suoi insiemi di livello? Più in generale, se $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono lineari, la funzione $(x, y) \mapsto \max\{f(x, y), g(x, y)\}$ può essere una seminorma (quando?) ma mai una norma. Esiste una norma sul piano i cui insiemi di livello siano triangoli, oppure pentagoni, esagoni, poligoni regolari di n lati?

Esercizio. La funzione $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + 2y^2}$ è una norma su \mathbb{R}^2 ? Come sono i suoi insiemi di livello? Esistono norme nel piano i cui insiemi di livello siano parabole, o iperboli?

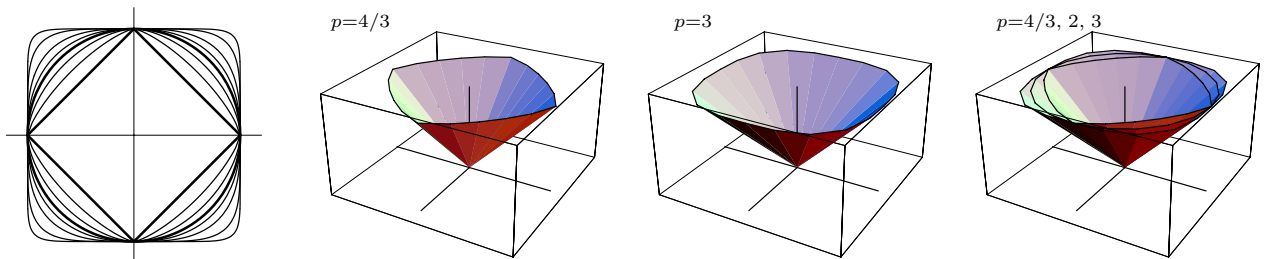
Esercizio. Sia $1 \leq p < +\infty$ e consideriamo la funzione

$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \quad \text{per } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che è una funzione convessa. (Suggerimento: dati $u, v \in \mathbb{R}^2$ calcolare la derivata prima e la derivata seconda rispetto a $t \in \mathbb{R}$, dove esistono, di $t \mapsto \|tu + (1-t)v\|_p$ e applicare i criteri noti di convessità in termini di comportamento delle derivate). Dimostrare poi che $v \mapsto \|v\|_p$ è una norma. (Suggerimento: per la disuguaglianza triangolare, usare la disuguaglianza di convessità con $\theta = 1/2$). Le figure seguenti mostrano l'insieme di livello $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_p = 1\}$ per alcuni valori di p .



Segue una figura che sovrappone gli insiemi di livello $\{v : \|v\|_p = 1\}$ per diversi valori di p , mettendo in grassetto i casi speciali $p = 1$ e $p = 2$, e poi dei grafici tridimensionali di $v \mapsto \|v\|_p$ per due valori di p uno minore e uno maggiore di 2, dapprima separatamente e poi confrontati con il valore $p = 2$, che risulta intermedio.



Dimostrare che, per $v \in \mathbb{R}^2$ fissato, la funzione $p \mapsto \|v\|_p$ è debolmente decrescente da $[1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ed è strettamente decrescente se v non è su uno dei due assi cartesiani (nel qual caso risulta costante). Come mai allora la norma $\|v\|_p$ decresce mentre invece gli insiemi di livello si ingrandiscono? Dimostrare che

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^2.$$

Questo fatto rende ragione dell'altrimenti misterioso simbolo $\|v\|_\infty$.

Esercizio. La formula che definisce $\|v\|_p$ ha senso anche quando $0 < p < 1$. In tal caso è una norma? (Suggerimento: provare la disuguaglianza triangolare su $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$). Come sono gli insiemi di livello? E il limite per $p \rightarrow 0^+$?

Esercizio. Il piano \mathbb{R}^2 può essere pensato anche come uno spazio vettoriale di dimensione 1 sul campo dei complessi. Dimostrare che le uniche norme di spazio vettoriale complesso nel piano sono del tipo $z \mapsto \alpha \|z\|_2$ con $\alpha > 0$ costante.