Auxiliar 3, Cálculo en Varias Variables
Prof. Marcelo Leseigneur
Prof. Aux. Rodrigo Assar, Sebastián Court

1. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados reales y $\phi : X \to Y$ una transformación lineal. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) ϕ es continua en 0.
   (ii) $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in X$ se tiene que $\|\phi(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.
   (iii) ϕ es continua.

   Indicación: Se propone el siguiente esquema de demostración:
   $(i) \Rightarrow (ii)$
   $(ii) \Rightarrow (iii)$
   $(iii) \Rightarrow (i)$ (que es trivial).

2. Considere la aplicación $I : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$I(f) = \int_0^1 f(x)dx,$$

   donde $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tal que f es continua}\}$ y está dotado de la norma uniforme.
   Demuestre que I es continua. (Usar problema anterior)

3. Sea el operador $D : C^1[0,1] \to C[0,1]$ definido por $D(f) = f'$, donde ambos espacios están dotados de la norma uniforme y se definió

   $$C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tal que } f' \text{ es continua.}\}$$

   ¿Es D un operador continuo?
   Para ello analice la continuidad en 0. Considere la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2\pi x)$. Comente.

4. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados decrecientes no vacíos (i.e $F_{n+1} \subseteq F_n$) y tales que $\text{diam}(F_n) = \sup(d(x,y) : x, y \in F_n) \to 0$ si $n \to \infty$. Pruebe que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\overline{x}\}$ con $\overline{x} \in X$.

   Indicación: Pruebe primero que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \phi$. Para ello considere $x_n \in F_n$ y pruebe que es una sucesión de Cauchy. Concluya usando que si $\overline{x} \in \overline{F_n} \Leftrightarrow \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to \overline{x}$. Por último pruebe que la intersección es un único elemento razonando por contradicción.

5. Para cada conjunto A, determine el interior, adherencia y frontera. Indique si son abiertos, cerrados u otros. Dibuje cada conjunto.

   a) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n+1)$ donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
   b) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 = 0\}$
   c) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$
   d) $A = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 4\}$

6. Considere $\mathbb{R}^N$ con la norma 2. Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función contractante y $a \in \mathbb{R}^N$. Se definen las siguientes funciones:

$$T_0 = T$$

y para cada $n = 1, 2, \ldots$ se define

$$T_n(x) = \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} T(x)$$

   (a) Demuestre que existe una única sucesión $\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $T_n(x_n) = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Asumiendo que la sucesión de la parte anterior converge en $\mathbb{R}^N$ a y, demuestre que entonces $T(y) = y = x_0$.

7. Sea X un conjunto con dos métricas ρ y σ definidas en él:

   a) Pruebe que $\rho(x, y) + \sigma(x, y)$ es una métrica en X.

   b) Suponga que $\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \quad \forall x, y \in X$. Probar que $S \subseteq X$ es cerrado con respecto a σ si lo es con respecto a ρ.

8. Sea $(E, \|\|)$ un e.v.n. y F un s.e.v de E. Demuestre que

$$B[0, 1] \subseteq F \Longrightarrow F = E$$

<u>Indicación:</u> Suponga que $F \nsubseteq E \Longrightarrow \exists x_0 \in E \quad x_0 \neq 0$ con $x_0 \notin F$