

Auxiliar 5, Cálculo en Varias Variables
Prof. Marcelo Leseigneur
Prof. Aux. Rodrigo Assar, Sebastián Court

1. Determine si las siguientes funciones son continuas en el origen:

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en función de α .

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

d)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^2 - y)^2}{x^7 \sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \wedge 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x - y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cos(y) - y \cos(x) - x + y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

g)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^6 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en función de α .

h)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Sean $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuas. Se define el conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ como $B = \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) \neq G(x)\}$. Demuestre que B es abierto.
3. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal donde ambos conjuntos están dotados de una norma.
 - (a) Pruebe que $\exists A \in \mathbb{R} \quad \|L(u) - L(v)\| \leq A \|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$. Determine A .
 - (b) Demuestre que L es continua.
 - (c) Muestre que $\text{Ker}(L)$ es cerrado.
 - (d) Demuestre que L inyectiva $\Leftrightarrow \exists m > 0 \quad \|L(x)\| \geq m \|x\|$.