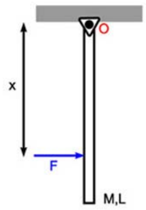
CENTRO DE PERCUSIÓN

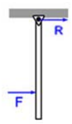



$\sum \vec{\tau}$ c/r O :

$$F x = \frac{1}{3} M L^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \quad a_{cm} = \alpha \frac{L}{2} = \frac{3}{2} \frac{F}{M} \frac{x}{L}$$

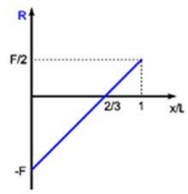
DCL




$\sum \vec{F} = M \vec{a}_{cm}$ :

$$F + R = M a_{cm}$$

$$F + R = \frac{3}{2} F \frac{x}{L} \Rightarrow R = F \left( \frac{3}{2} \frac{x}{L} - 1 \right)$$

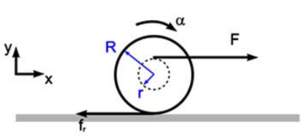



$$\text{Si: } \underbrace{x = \frac{2}{3} L}_{\text{CENTRO DE PERCUSIÓN}} \Rightarrow R = 0$$





EJEMPLO 1




$\sum \vec{F} = M \vec{a}_{cm}$ :

$$\hat{x}) \quad F - f_r = M a_{cm} \qquad (1)$$

$\sum \vec{\tau}$ c/r cm :

$$F r + f_r R = I \alpha \qquad (2)$$

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2} M R^2 \qquad \text{RSR} \Rightarrow a_{cm} = \alpha R$$

ENTONCES (1) $\rightarrow$ $f_r = F - M a_{cm}$ (3)

REEMPLAZANDO EN (2)

$$F r + (F - M a_{cm}) R = \frac{1}{2} M R \, a_{cm}$$

$$F (r + R) = \frac{3}{2} M R \, a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{r}{R} \right) \frac{F}{M}$$

POR LO TANTO

$$(3) \rightarrow \quad f_r = \frac{F}{3} \left[ 1 - \frac{2r}{R} \right]$$

Si $r = \frac{R}{2}$ $\Rightarrow$ $f_r = 0$ i.e. EL ROCE ESTÁTICO SE ANULA

Si $r > \frac{R}{2}$ $\Rightarrow$ $f_r < 0$ i.e. LA FUERZA DE ROCE APUNTA HACIA ADELANTE

PARA QUE EL CILINDRO RUEDE SIN RESBALAR $|f_r| \le \mu_e N$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{3}\left|1 - \frac{2r}{R}\right| \le \mu_e M g$$

$$\therefore \quad \mu_e \geq \frac{F}{3Mg}\left|1 - \frac{2r}{R}\right|$$

EN CASO CONTRARIO, EL CILINDRO RESBALARÁ BAJO LA ACCIÓN DE LA FUERZA F.

SI EL CM DEL CILINDRO SE MUEVE CON VELOCIDAD CONSTANTE

$\Rightarrow a_{cm} = 0$

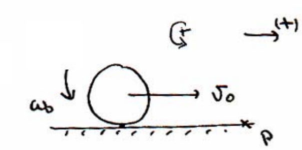
DE (1) SE TIENE QUE $f_r = F$

EN EL CASO DE UN CILINDRO RODANDO LIBREMENTE POR UNA SUPERFICIE HORIZONTAL $F = 0 \Rightarrow f_r = 0$





Problema



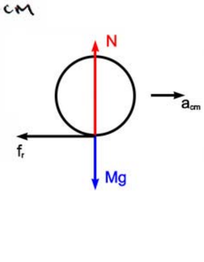

CI: $\omega_0, v_0$

a) relación entre $v_0, \omega_0, R$ para que la bolita se detenga justo cuando deja de girar

b) relación entre $v_0, \omega_0, R$ para que la bolita resbale, se detenga y vuelva RSR con una velocidad constante igual a $\frac{3}{7} v_0$

Sol:

a) $a = a_{cm}$




$$-f_r = Ma$$

$$-\mu M g = Ma$$

$$\boxed{a = -\mu g}$$

$$\tau_P = \frac{dL_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L_{CM} + L_{c/r\,CM}\right)$$

$$L_{CM} = -MR\,v_{CM} \qquad L_{c/r\,CM} = I\omega$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(L_{CM} + L_{c/r\,CM}\right) = -MRa + I\alpha$$

$$\tau_P = \tau_N + \tau_{Mg} = 0 \Rightarrow -MRa + I\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{MRa}{I}$$

$$a = -\mu g \Rightarrow \alpha = -\frac{\mu g}{kR}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_f = 0 = \omega_0 - \frac{\mu g}{kR}T$$

$$T = \frac{\omega_0 kR}{\mu g}$$





al mismo tiempo $T$ la bolita se detiene

$$v_f = 0 = v_0 - \mu g T \Rightarrow T = \frac{v_0}{\mu g}$$

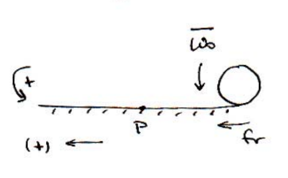
$$\therefore \quad \omega_0 = \frac{v_0}{kR} \qquad k = \frac{2}{5} \text{ esfera}$$

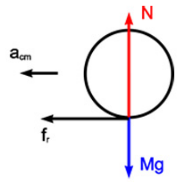
b) $\omega_f = \omega_0 - \frac{\mu g}{kR}T$

$0 = v_0 - \mu g T$ $\Rightarrow \omega_f = \omega_0 - \frac{v_0}{kR}$

Sea $\bar{\omega}_0 = \omega_f = \omega_0 - \frac{v_0}{kR}$

las nuevas CI son






$$f_r = Ma$$

$$\mu M g = Ma$$

$$\Rightarrow \quad a = \mu g$$

$$\tau_P = \frac{d}{dt}\left[ M R v_{cm} + I\omega \right] = 0$$

$$M R a + I\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{MR}{I}\mu g$$

$$\alpha = -\frac{\mu g}{kR}$$

$$\bar{v}_f = \bar{\omega}_f R \qquad (RSR)$$

$$\bar{v}_f = \mu g T \qquad (\bar{v}_0 = 0)$$

$$\bar{\omega}_f = \bar{\omega}_0 - \frac{\mu g}{kR} T$$





$$\Rightarrow \quad \bar{\omega}_f R = \mu g T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\bar{\omega}_f R}{\mu g}$$

$$\bar{\omega}_f = \bar{\omega}_0 - \frac{\mu g}{kR}\,\frac{\bar{\omega}_f R}{\mu g}$$

$$\bar{\omega}_f = \frac{\bar{\omega}_0}{1 + 1/k} = \frac{\omega_0 - \frac{v_0}{kR}}{1 + 1/k}$$

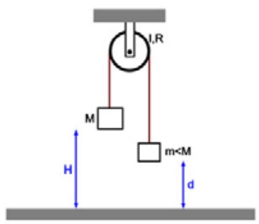
$$\bar{v}_f = \bar{\omega}_f R = \frac{3}{7} v_0$$

$$\omega_0 - \frac{v_0}{kR} = \frac{3}{7}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{v_0}{R}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}\left\{ \frac{3}{7}\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} \right\} \Rightarrow v_0 = \frac{R\omega_0}{\frac{3}{7} + \frac{10}{7k}}$$

para una esfera $k = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{4} R\omega_0$

Ejemplo




a) tiempo que M demora en llegar al piso

b) altura que llega m

sol:

a) $E_i = MgH + mgd$

$$E_f = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(d+H)$$

pero $v_m = v_M = R\omega = v$ entonces

$E_i = E_f \Rightarrow$

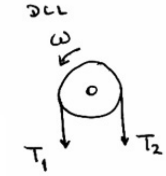
$$MgH + mgd = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{Iv^2}{R^2} + mg(d+H)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2gHR^2(M-m)}{(M+m)R^2 + I}$$



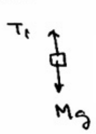


DCL



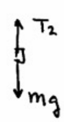

$$\Sigma\tau_o = T_1R - T_2R = I\alpha$$

DCL




$$-T_1 + Mg = Ma_M$$

DCL




$$-T_2 + mg = -ma_m$$

La cuerda no desliza en la polea

$$\Rightarrow a = a_m = a_M = \alpha R$$

Despejando la aceleración $a$ se tiene

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m+\frac{I}{R^2}}\right)g$$

Entonces, el tiempo de caída está dado por

$$H = \frac{1}{2}aT^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}\frac{aT}{v}\cdot T$$

$$T = 2H\sqrt{\frac{(M+m)R^2+I}{2gHR^2(M-m)}}$$

b) $$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2}+m\right)v^2 = mgh$$

$$\Rightarrow h = H\frac{(M-m)}{m}\frac{(I+mR^2)}{[I+(M+m)R^2]}$$