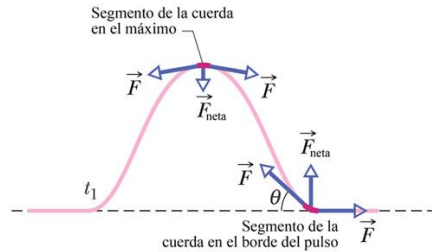


# VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA TRANSVERSAL EN UNA CUERDA

CONSIDEREMOS EL MOVIMIENTO DE UN PEDAZO DE LA CUERDA CUANDO EL PULSO PASA POR EL.



Si  $v_{onda}$  es la velocidad de propagación de la onda, la masa del segmento de la cuerda afectado en un tiempo  $\Delta t$  es

$$m = \mu v_{onda} \Delta t$$

↑  
DENSIDAD DE  
MASA LINEAL

503

EL EXTREMO DE LA CUERDA QUE COMIENZA A SER AFECTADO POR LA ONDA RECIBE UN IMPULSO

$$\Delta p_y = F_y \Delta t$$

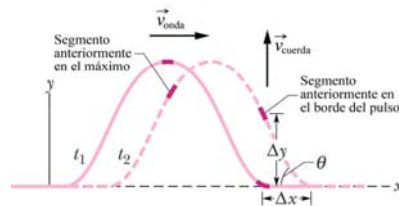
$$\Delta p_y = m \Delta v_y = m v_y$$

$$\Rightarrow m v_y = \mu v_{onda} \Delta t v_y = F_y \Delta t$$

PERO  $F_y = F \sin \theta$  y POR GEOMETRÍA

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{v_y}{v_{onda}}$$



ENTONCES

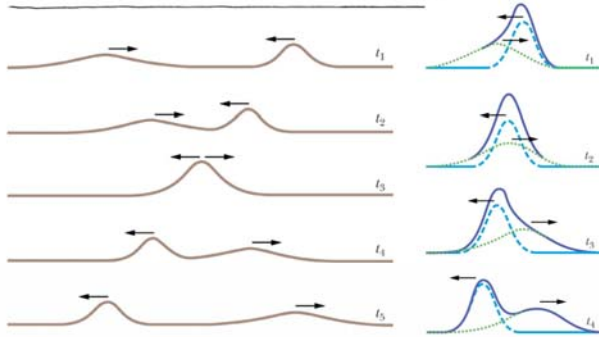
$$\mu v_{onda} \Delta t v_{onda} \tan \theta = F \sin \theta \Delta t$$

$$\mu v_{onda}^2 = F \sin \theta \approx F$$

$$\therefore v_{onda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

504

### PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN PARA ONDAS



CUANDO DOS ONDAS SE SUPERPONEN, EL DESPLAZAMIENTO DE CADA PUNTO DE LA CUERDA ES LA SUMA DE LOS DOS DESPLAZAMIENTOS QUE TENDRIAN DE CADA ONDA SEPARADAMENTE.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

505

### INTERFERENCIA DE ONDAS

SEAN DOS ONDAS SINUSOIDALES

$$y_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$$

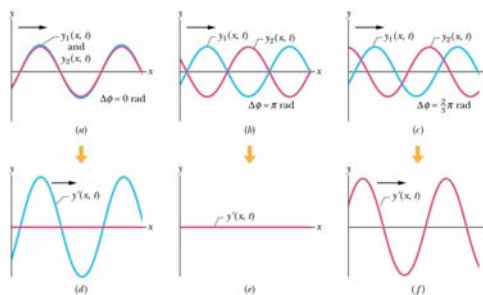
PRC. DE SUPERPOSICIÓN  $\Rightarrow y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

USANDO LA IDENTIDAD

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$$

SE TIENE

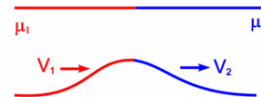
$$y(x,t) = 2A \cos \left( \frac{1}{2}\phi_0 \right) \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi_0)$$



506

## REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS EN UNA CUERDA

Supongamos que una onda se propaga a lo largo de dos cuerdas de distinta densidad



$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

con  $T$  = tensión de la cuerda y  $\mu$  = densidad de masa lineal.

Coloquemos un sistema de coordenadas en la unión de las cuerdas.

En  $x=0$  que tiene que cumplir

$$y_i + y_r = y_t \quad (1)$$

$$\frac{dy_i}{dx} + \frac{dy_r}{dx} = \frac{dy_t}{dx} \quad (2)$$

donde  $y_i$  es la onda incidente,  $y_r$  es la onda reflejada e  $y_t$  es la onda transmitida.

507

Las condiciones (1) y (2) implican que la onda es continua en el punto  $x=0$ .

Ej: onda armónica

$$y_i = A \cos(k_1 x - \omega t) \quad k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

$$y_r = B \cos(k_1 x + \omega t)$$

$$y_t = C \cos(k_2 x - \omega t) \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

entonces en  $x=0$

$$(1) \rightarrow A \cos(-\omega t) + B \cos(\omega t) = C \cos(-\omega t)$$

$$(2) \rightarrow -A k_1 \sin(-\omega t) - B k_1 \sin(\omega t) = -C k_2 \sin(-\omega t)$$

pero  $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$  y  $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow A + B = C \quad (3)$$

$$A k_1 - B k_1 = C k_2 \quad (4)$$

508

De (3)

$$B = C - A$$

reemplazando en (4)

$$A - (C - A) = C \frac{k_2}{k_1}$$

$$2A = C \left( \frac{k_2}{k_1} + 1 \right) \Rightarrow C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

Por lo tanto

$$B = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A - A \Rightarrow B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$$

En términos de las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  se tiene

$$B = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A \quad \text{amplitud onda reflejada}$$

$$C = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} A \quad \text{amplitud onda transmitida}$$

509

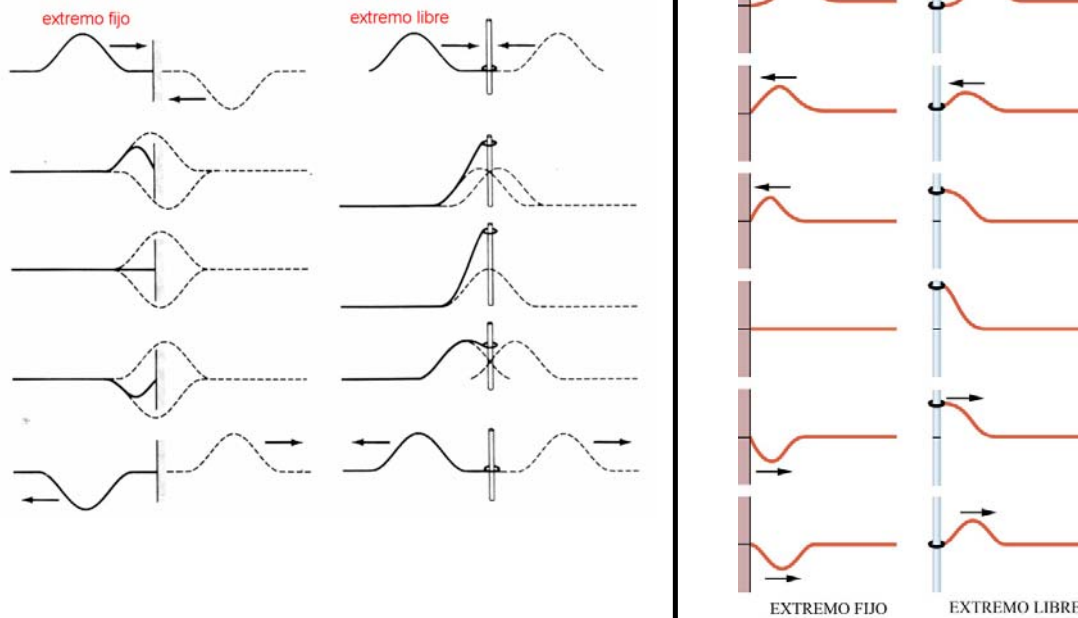
Si:  $v_1 = v_2 \Rightarrow B = 0$  y  $C = A$  i.e. no existe  
onda reflejada

Si:  $v_1 > v_2 \Leftrightarrow \mu_2 > \mu_1 \Rightarrow B < 0$  i.e. la onda  
reflejada se invierte w.r. a la  
onda incidente

Si:  $v_2 > v_1 \Leftrightarrow \mu_1 > \mu_2 \Rightarrow B > 0$  i.e. la onda  
reflejada no se invierte

510

## CONDICIONES DE BORDE



511

## ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA

Consideremos una cuerda con uno de sus extremos fijo.

La superposición (suma) de dos ondas con igual amplitud, periodo y longitud de onda pero que viajan en sentidos opuestos genera una onda estacionaria.

En efecto, sean

$$y_1(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$y_1$  es una onda que viaja hacia la izquierda e

$y_2$  viaja hacia la derecha

La onda resultante  $y(x,t)$  está dada por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = A \sin(kx + \omega t) + A \sin(kx - \omega t)$$

512

PERO  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$

ENTONCES

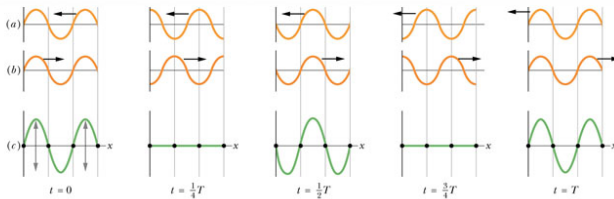
$$y(x,t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

onda estacionaria en una cuerda  
con extremo fijo en  $x = 0$

los nodos están dados por la condición  $y(x,t) = 0$

$$\Rightarrow \sin kx = 0 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como  $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$



513

### MODOS NORMALES DE UNA CUERDA

Consideremos ahora una cuerda de largo  $L$  fija en ambos extremos (ej. cuerdas de una guitarra).

En este caso la superposición de dos ondas de igual amplitud, período y longitud de onda genera una onda estacionaria de la forma

$$y(x,t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

donde ahora se tiene que cumplir que  $y = 0$  en  $x = 0$  y también en  $x = L$ . Por lo tanto,

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (*)$$

514

o bien  $\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (*) \Rightarrow \quad f_n = n \frac{v}{2L} \quad (*)$

Es decir, la frecuencia o longitud de onda de la onda resultante tiene que cumplir  $(*)$  para que la onda sea estacionaria.

Las frecuencias  $f_n$  se llaman armónicos. El primer armónico  $f_1 = \frac{v}{2L}$  se denomina frecuencia fundamental.

