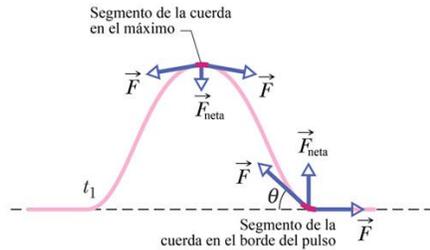


VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA TRANSVERSAL EN UNA CUERDA

CONSIDEREMOS EL MOVIMIENTO DE UN PEDAZO DE LA CUERDA CUANDO EL PULSO PASA POR EL.



Si v_{onda} es la velocidad de propagación de la onda, la masa del segmento de la cuerda afectado en un tiempo Δt es

$$m = \mu v_{onda} \Delta t$$

↑
DENSIDAD DE MASA LINEAL

EL EXTREMO DE LA CUERDA QUE COMIENZA A SER AFECTADO POR LA ONDA RECIBE UN IMPULSO

$$\Delta p_y = F_y \Delta t$$

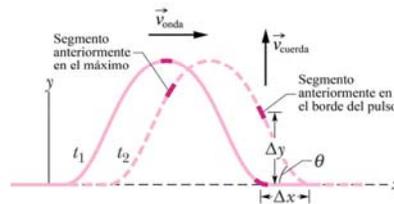
$$\Delta p_y = m \Delta v_y = m v_y$$

$$\Rightarrow m v_y = \mu v_{onda} \Delta t v_y = F_y \Delta t$$

PERO $F_y = F \sin \theta$ y por geometría

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{v_y}{v_{onda}}$$



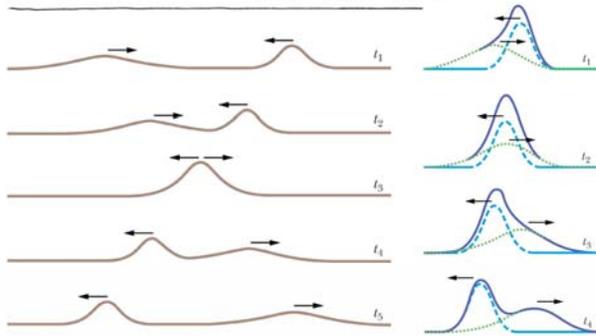
ENTONCES

$$\mu v_{onda} \Delta t v_{onda} \tan \theta = F \sin \theta \Delta t$$

$$\mu v_{onda}^2 = F \sin \theta \approx F$$

$$\therefore v_{onda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN PARA ONDAS



CUANDO DOS ONDAS SE SUPERPONEN, EL DESPLAZAMIENTO DE CADA PUNTO DE LA CUERDA ES LA SUMA DE LOS DOS DESPLAZAMIENTOS QUE TENDRIAN DE CADA ONDA SEPARADAMENTE.

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

INTERFERENCIA DE ONDAS

SEAN DOS ONDAS SINUSOIDALES

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$$

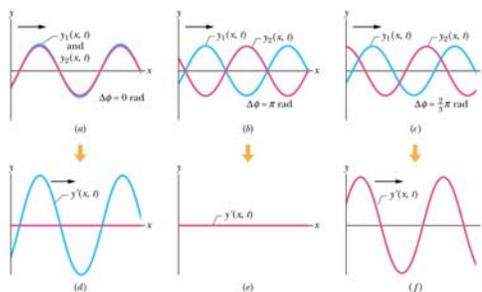
PRC. DE SUPERPOSICIÓN $\Rightarrow y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$

USANDO LA IDENTIDAD

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$$

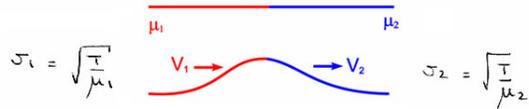
SE TIENE

$$y(x, t) = 2A \cos \left(\frac{1}{2} \phi_0 \right) \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2} \phi_0)$$



REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS EN UNA CUERDA

Supongamos que una onda se propaga a lo largo de dos cuerdas de distinta densidad



con $T =$ tensión de la cuerda y $\mu =$ densidad de masa lineal.

Coloquemos un sistema de coordenadas en la unión de las cuerdas.

En $x = 0$ se tiene que cumplir

$$y_i + y_r = y_t \quad (1)$$

$$\frac{dy_i}{dx} + \frac{dy_r}{dx} = \frac{dy_t}{dx} \quad (2)$$

donde y_i es la onda incidente, y_r es la onda reflejada e y_t es la onda transmitida.

507

Las condiciones (1) y (2) implican que la onda es continua en el punto $x = 0$.

Ej: onda armónica

$$y_i = A \cos(k_1 x - \omega t) \quad k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

$$y_r = B \cos(k_1 x + \omega t)$$

$$y_t = C \cos(k_2 x - \omega t) \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

entonces en $x = 0$

$$(1) \rightarrow A \cos(-\omega t) + B \cos(\omega t) = C \cos(-\omega t)$$

$$(2) \rightarrow -A k_1 \sin(-\omega t) - B k_1 \sin(\omega t) = -C k_2 \sin(-\omega t)$$

pero $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$ y $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow A + B = C \quad (3)$$

$$A k_1 - B k_1 = C k_2 \quad (4)$$

508

De (3)

$$B = C - A$$

reemplazando en (4)

$$A - (C - A) = C \frac{k_2}{k_1}$$

$$2A = C \left(\frac{k_2}{k_1} + 1 \right) \Rightarrow C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

Por lo tanto

$$B = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A - A \Rightarrow B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$$

En términos de las velocidades v_1 y v_2 se tiene

$$B = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A \quad \text{amplitud onda reflejada}$$

$$C = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} A \quad \text{amplitud onda transmitida}$$

509

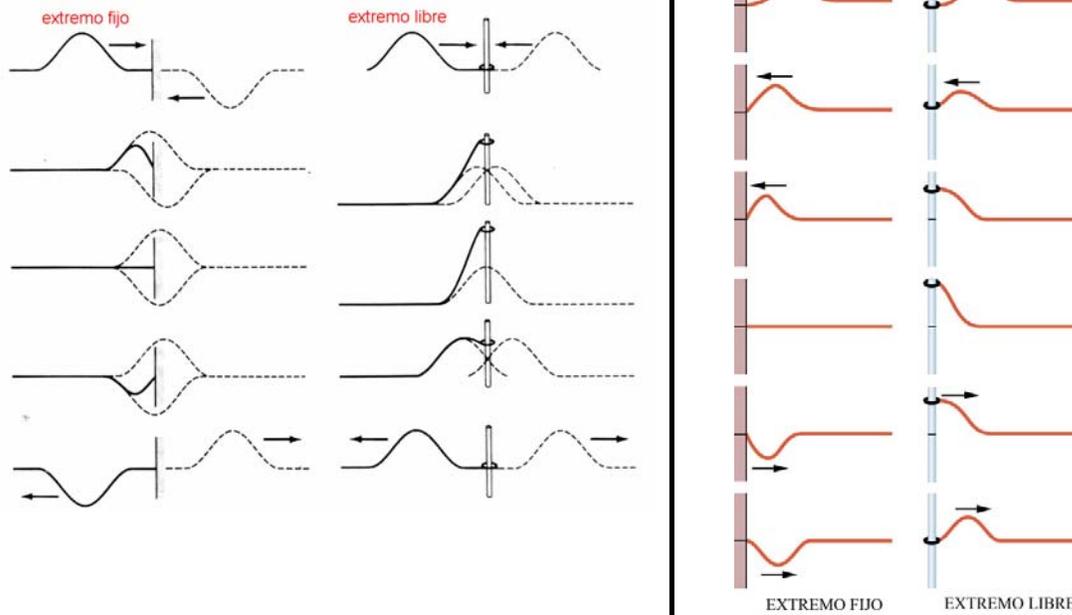
Si: $v_1 = v_2 \Rightarrow B = 0$ y $C = A$ i.e. no existe
onda reflejada

Si: $v_1 > v_2 \Leftrightarrow \mu_2 > \mu_1 \Rightarrow B < 0$ i.e. la onda
reflejada se invierte w.r. a la
onda incidente

Si: $v_2 > v_1 \Leftrightarrow \mu_1 > \mu_2 \Rightarrow B > 0$ i.e. la onda
reflejada no se invierte

510

CONDICIONES DE BORDE



511

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA

Consideremos una cuerda con uno de sus extremos fijo.

La superposición (suma) de dos ondas con igual amplitud, periodo y longitud de onda pero que viajan en sentidos opuestos genera una onda estacionaria.

En efecto, sean

$$y_1(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

y_1 es una onda que viaja hacia la izquierda e

y_2 viaja hacia la derecha

La onda resultante $y(x,t)$ está dada por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = A \sin(kx + \omega t) + A \sin(kx - \omega t)$$

512

PERO $\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen} \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$

ENTONCES

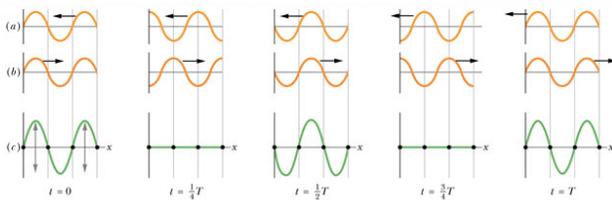
$$y(x,t) = 2A \text{sen } kx \cos \omega t$$

onda estacionaria en una cuerda
 con extremo fijo en $x = 0$

los nodos están dados por la condición $y(x,t) = 0$

$$\Rightarrow \text{sen } kx = 0 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$



513

MODOS NORMALES DE UNA CUERDA

Consideremos ahora una cuerda de largo L fija en ambos extremos (ej. cuerdas de una guitarra).

En este caso la superposición de dos ondas de igual amplitud, periodo y longitud de onda genera una onda estacionaria de la forma

$$y(x,t) = 2A \text{sen } kx \cos \omega t$$

donde ahora se tiene que cumplir que $y = 0$ en $x = 0$ y también en $x = L$. Por lo tanto,

$$\text{sen } kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (*)$$

514

o bien $\lambda_n = \frac{2L}{n} \oplus \Rightarrow f_n = n \frac{v}{2L} \oplus$

Es decir, la frecuencia o longitud de onda de la onda resultante tiene que cumplir \oplus para que la onda sea estacionaria.

Las frecuencias f_n se llaman armónicos. El primer armónico $f_1 = \frac{v}{2L}$ se denomina frecuencia fundamental.

