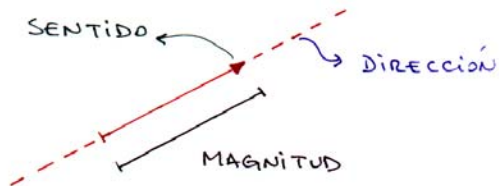


VECTORES

¿POR QUÉ?

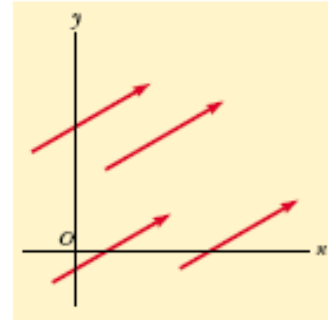
- DESCRIBIR MOVIMIENTO EN 2 Y 3 DIM.
- NOTACIÓN MAS COMPACTA



EJEMPLOS :

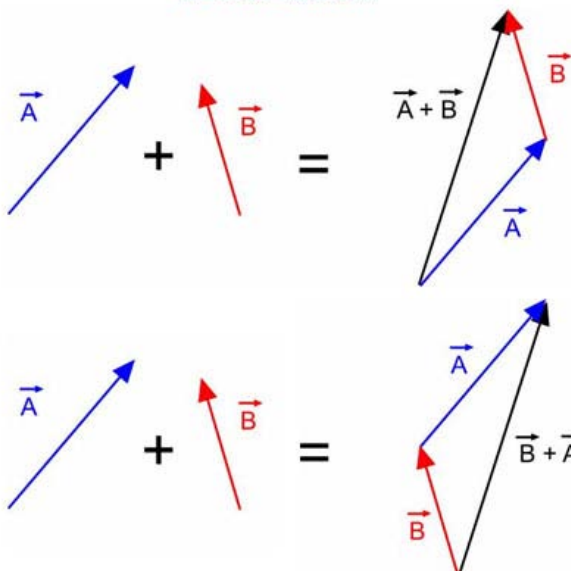
↓ g
POSICIÓN Y VELOCIDAD DE UN OBJETO

Dos vectores son iguales si sus magnitudes son iguales y ambos apuntan en la misma dirección aún cuando sus puntos de partida sean diferentes.



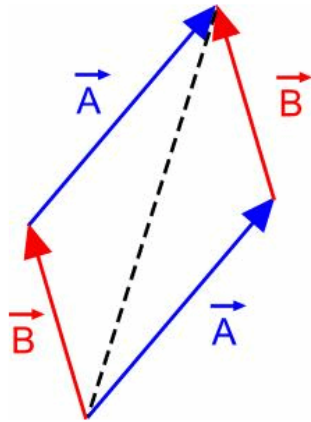
61

GEOMETRÍA INDEPENDIENTE DEL SISTEMA DE REFERENCIA



62

LEY DEL PARALELOGRAMO

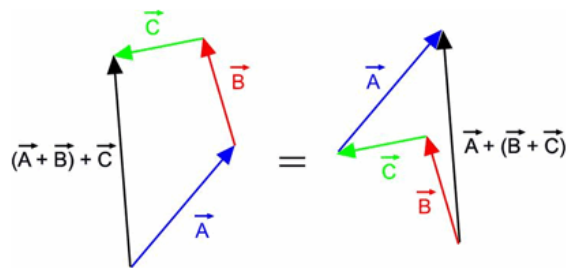


SUMA DE VECTORES ES CONMUTATIVA
 ¡NO IMPORTA EL ORDEN!

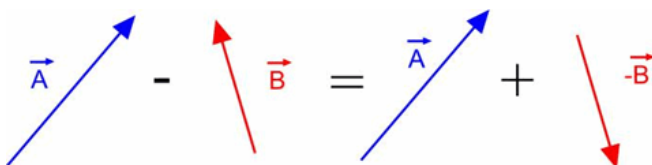
63

ASOCIATIVIDAD

SUMA DE 3 VECTORES



RESTA DE VECTORES

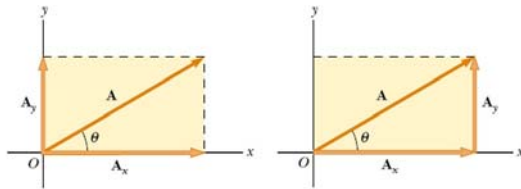


64

VECTORES

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA

→ SISTEMA DE REFERENCIA

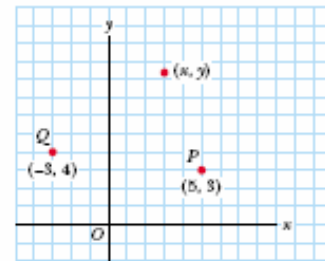


2DIM → $\vec{A} = (A_x, A_y)$
PAR ORDENADO

MAGNITUD DEL VECTOR $\vec{A} \equiv |\vec{A}|$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Sistema de referencia



65

COMPONENTES CARTESIANAS

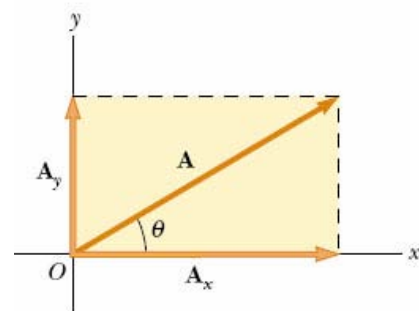
$$A_x = |\vec{A}| \cos \theta$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \theta$$

¡ ORDEN DE LAS COMPONENTES ES IMPORTANTE !

DIRECCIÓN → $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

SENTIDO → SIGNO DE LAS COMPONENTES
 A_x y A_y



66

SUMA DE VECTORES

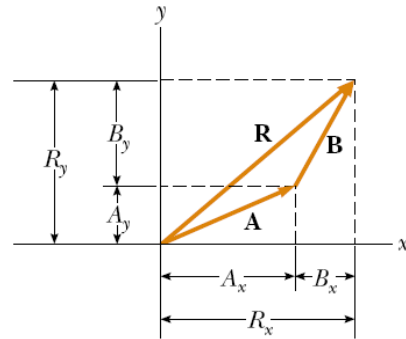
$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_x, A_y) \\ \vec{B} &= (B_x, B_y) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{USANDO EL MISMO} \\ \text{SISTEMA DE} \\ \text{REFERENCIA} \end{array} \right.$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y)$$

PARA SUMAR VECTORES SE SUMAN SUS COMPONENTES

RESTA DE VECTORES

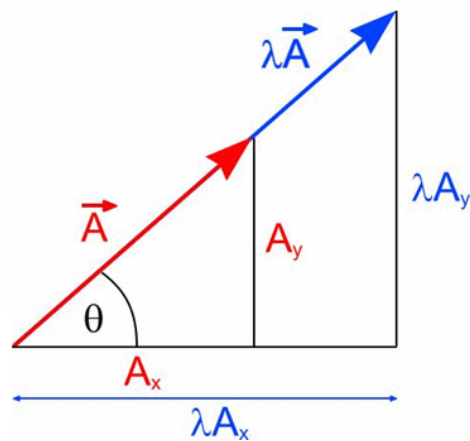
$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y)$$



67

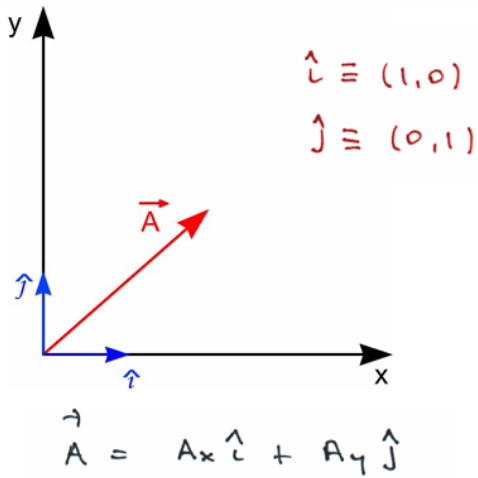
Multiplicación por escalar

$$\lambda \vec{A} = \lambda (A_x, A_y) = (\lambda A_x, \lambda A_y)$$



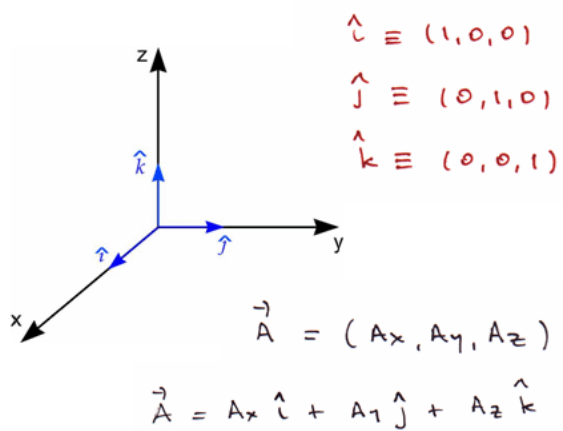
68

VECTORES UNITARIOS



69

3-DIMENSIONES



70

Movimiento en dos dimensiones

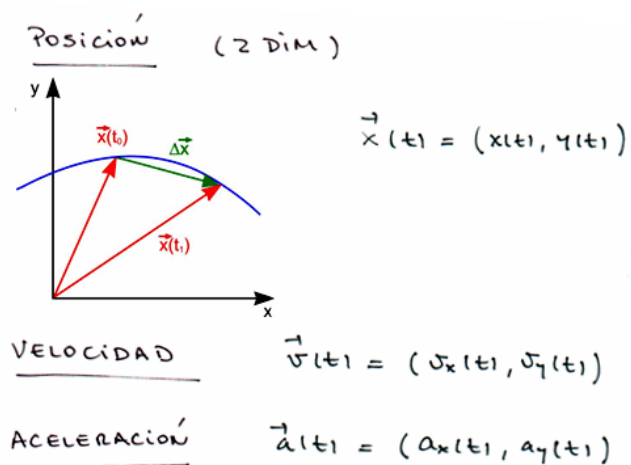
En 1922, uno de los Zacchinis, una famosa familia de circenses italianos, fue la primera “bala humana” disparada por un cañón. Para aumentar la espectacularidad del acto, la familia aumento gradualmente la distancia del vuelo, hasta que, en 1940, Emanuel Zacchini voló sobre tres ruedas de la fortuna, atravesando una distancia horizontal de 69 m.



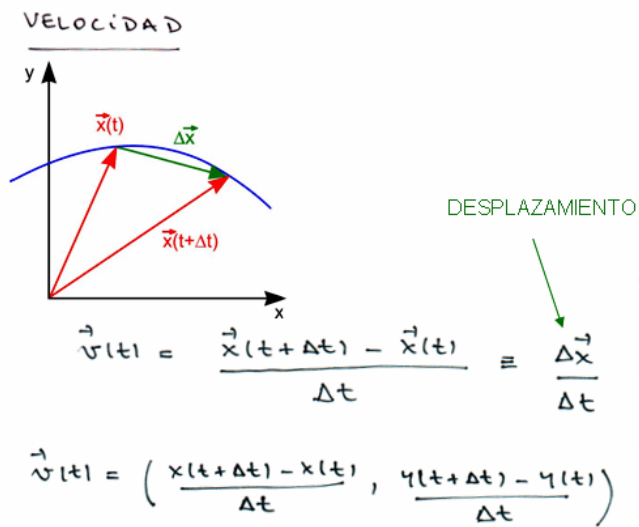
¿Cómo pudo saber donde colocar la red y cómo pudo estar seguro que alcanzaría altura suficiente para no golpear las ruedas de la fortuna?



71



72



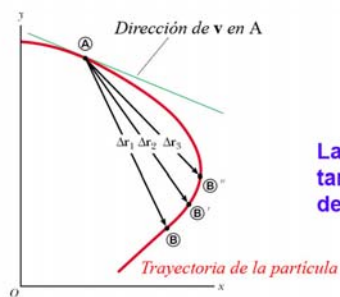
73

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right] \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$

$\dot{x}(t)$

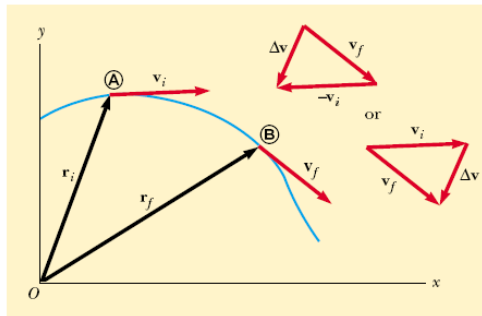
ANÁLOGAMENTE PARA $v_y(t)$



La velocidad es siempre
tangente a la trayectoria
de la partícula

74

Aceleración instantánea



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

¡La aceleración no es necesariamente tangente a la trayectoria de la partícula!

Una partícula puede acelerar si:

- El modulo de la velocidad cambia.
- La dirección de la velocidad cambia.
- Tanto el modulo de la velocidad como su dirección cambian.

75

ACELERACIÓN CONSTANTE

$\vec{a} = (0, -g)$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

EJE X

$$a_x = 0$$



$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$v_x = v_{0x}$$

EJE Y

$$a_y = -g$$

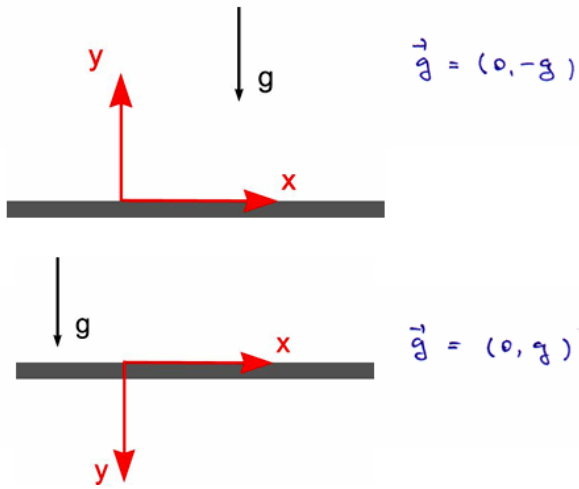


$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{0y} - g t$$

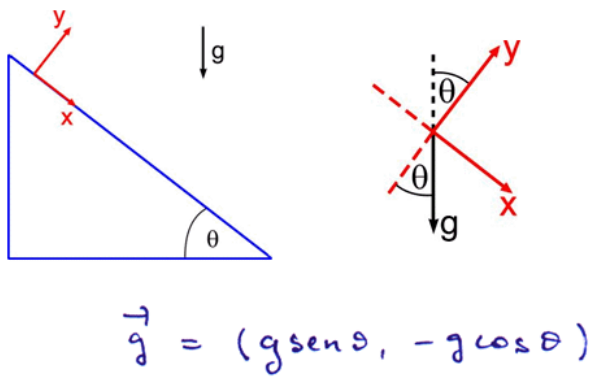
76

EJEMPLO



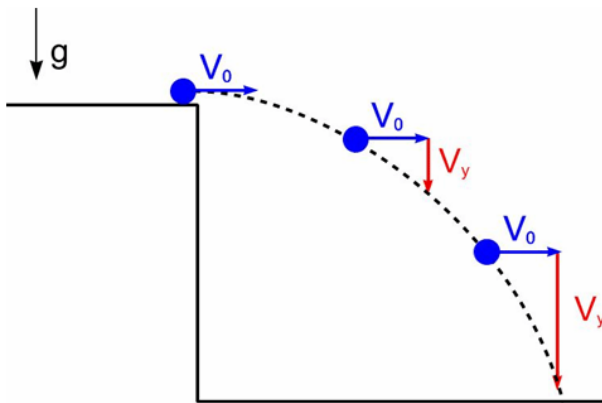
77

EJEMPLO PLANO INCLINADO



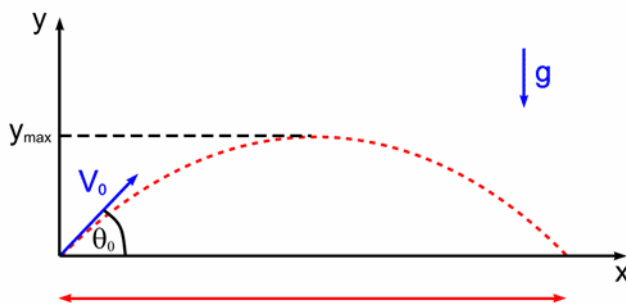
78

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN (GALILEO)



79

LANZAMIENTO DE PROYECTILES



POSICIÓN INICIAL

$$x_0 = y_0 = 0$$

VELOCIDAD INICIAL

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

ACELERACIÓN

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

80

Ecuaciones de Movimiento

EJE X $x = v_0 \cos \theta_0 t$ ①
 $v_x = v_0 \cos \theta_0$ ②

EJE Y $y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ ③
 $v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t$ ④

DE LA ECUACIÓN ①

$$x = v_0 \cos \theta_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$$

REEMPLAZANDO EN ③

$$y = v_0 \sin \theta_0 \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2$$

81

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

$$y \equiv ax - bx^2 = \text{EC. PARÁBOLA}$$

ALCANCE MÁXIMO R

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

$$0 = x \left(\tan \theta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x \right)$$

$$\Rightarrow \text{i) } x = 0$$

$$\text{ii) } \tan \theta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x = 0$$

$$\therefore x = \frac{2 v_0^2 \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0}{g \cos \theta_0}$$



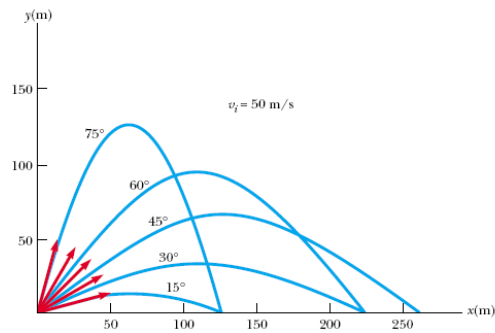
82

POR LO TANTO

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

$$R_{\text{maximo}} = \frac{v_0^2}{g} \quad \text{PARA } \theta = 45^\circ$$



83

ALTURA MÁXIMA

$$v_y = 0 \Rightarrow v = v_0 \sin \theta_0 - g t_{\text{max}}$$

$$t_{\text{max}} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

REEMPLAZANDO EN (3)

$$H = v_0 \sin \theta_0 \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{g}$$

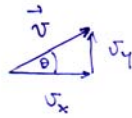
84

RELACIÓN ÚTIL

$$\frac{v_y}{v_{0x}} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}} t$$

$$v_{0x} \equiv v_0 \cos \theta_0 = v_x$$

PERO $\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$

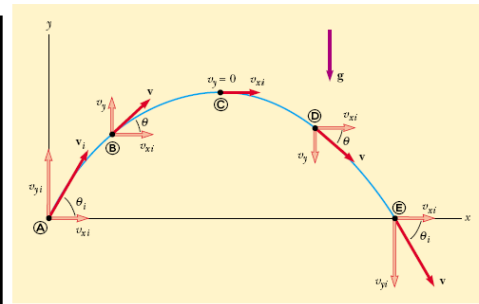


ENTONCES

$$\tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{g}{v_{0x}} t$$

PERO $t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$

$$\therefore \tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} x$$



85

PERO $R = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$ ENTONCES

$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left(1 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} \frac{x}{\sin \theta_0} \right)$$

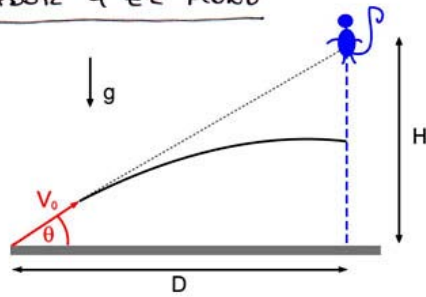
$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left(1 - \frac{2x}{\frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}} \right)$$

$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left(1 - \frac{2x}{R} \right)$$

ÁNGULO EN FUNCIÓN DE
LA POSICIÓN

86

EL CAZADOR Y EL MONO



ECS. DE MOVIMIENTO

BALA

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \theta t & y &= v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_x &= v_0 \cos \theta & v_y &= v_0 \sin \theta - g t \end{aligned}$$

87

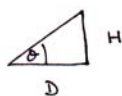
MONO

$$\begin{aligned} y &= h - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y &= -g t \end{aligned}$$

TIEMPO QUE DEMORA LA BALA EN RECORRER LA DISTANCIA D

$$\begin{aligned} x = D &\Rightarrow D = v_0 \cos \theta T \\ T &= \frac{D}{v_0 \cos \theta} \end{aligned}$$

PERO



$$\tan \theta = \frac{H}{D}$$

88

$$\Rightarrow D = \frac{H}{\tan \theta} = \frac{H \cos \theta}{\sin \theta}$$

ENTONCES

$$T = \frac{H}{v_0 \sin \theta}$$

ALTURA DE LA BALA

$$y_{\text{BALA}} = v_0 \sin \theta \frac{H}{v_0 \sin \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{v_0 \sin \theta} \right)^2$$

$$y_{\text{BALA}} = H - \frac{1}{2} \frac{g H^2}{v_0^2 \sin^2 \theta}$$

89

ALTURA DEL MONO

$$y_{\text{mono}} = H - \frac{1}{2} g T^2$$

$$y_{\text{mono}} = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{v_0 \sin \theta} \right)^2$$

$$y_{\text{mono}} = H - \frac{1}{2} \frac{g H^2}{v_0^2 \sin^2 \theta}$$

POR LO TANTO

$$y_{\text{BALA}} = y_{\text{mono}}$$

¡EL CAZADOR SIEMPRE LE APUNTA AL MONO!

90