

## Trabajo y Energía Cinética

En las Olimpiadas de 1996, Andrey Chermerkin rompió el record mundial al levantar 260 kg desde el piso hasta arriba de su cabeza (aprox. 2 m). En 1957, Paul Anderson se acostó debajo de una plataforma de madera cargada con pedazos de plomo con un peso total de 27.900 N (¡2.850 kg!) y luego la levantó cerca de 1 cm.



¿Quién hizo más trabajo sobre los objetos que levantaron?



206

### TRABAJO Y ENERGÍA

LAS LEYES DE NEWTON RELACIONAN LA ACELERACIÓN CON LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN CUERPO. ESTO PERMITE PREDECIR LOS VALORES FUTUROS DE LA POSICIÓN Y VELOCIDAD DE UNA PARTÍCULA.

SIN EMBARGO, EN MUCHAS SITUACIONES ES DIFÍCIL USAR LAS LEYES DE NEWTON PARA ANALIZAR EL MOVIMIENTO Y PREDECIR, POR EJEMPLO, LA VELOCIDAD DE UNA PARTÍCULA EN UN PUNTO ARBITRARIO DE LA TRAYECTORIA.

EJEMPLO: SALTADOR DE SKI



PARA ESTO, EXISTE UNA MANERA ALTERNATIVA DE RELACIONAR FUERZAS Y EL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA.

⇒ TEOREMA TRABAJO - ENERGÍA

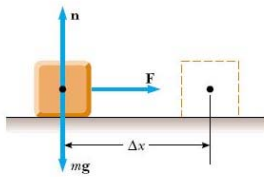
207

## TRABAJO EN 1-DIMENSION

CASO MÁS SIMPLE: FUERZA CONSTANTE UNA DIMENSIÓN



LA FUERZA  $F$  QUE ACTÚA SOBRE UNA PARTÍCULA QUE SE MUEVE A LO LARGO DEL EJE  $x$  REALIZA UN TRABAJO DADO POR



DESPLAZAMIENTO DE LA PARTÍCULA

$$W = F \Delta x$$

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA  $F$

$$\Delta x = x_f - x_i \Rightarrow \begin{aligned} \Delta x > 0 & \text{ si } x_f > x_i \\ \Delta x < 0 & \text{ si } x_f < x_i \end{aligned}$$

208

$W$  ES UNA CANTIDAD ESCALAR



$W > 0 \Rightarrow$  FUERZA Y DESPLAZAMIENTO TIENEN EL MISMO SENTIDO

$W < 0 \Rightarrow$  FUERZA Y DESPLAZAMIENTO APUNTAN EN SENTIDOS OPUESTOS

$$W = 0 \quad \text{si} \quad \Delta x = 0$$



$$\text{UNIDADES: } [W] = [F][\Delta x] = \text{N} \cdot \text{m} \equiv \text{Joules}$$

209

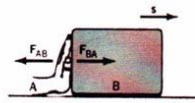
SI VARIAS FUERZAS ACTÚAN SOBRE UNA PARTÍCULA  
EL TRABAJO TOTAL ES LA SUMA DE LOS TRABAJOS  
INDIVIDUALES

$$W_{\text{TOTAL}} = F_{\text{net}} \Delta x = \left( \sum_i F_i \right) \Delta x$$

$$W_{\text{TOTAL}} = F_1 \Delta x + F_2 \Delta x + \dots$$

$$W_{\text{TOTAL}} = W_1 + W_2 + \dots = \sum_i W_i$$

ES IMPORTANTE IDENTIFICAR LA FUERZA QUE  
INTERACTÚA CON EL CUERPO AL CALCULAR EL  
TRABAJO



POR LA 3ª LEY DE  
NEWTON SABEMOS QUE

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

ENTONCES

$$W_{\text{A SOBRE B}} = -W_{\text{B SOBRE A}}$$

210

EJEMPLO :



APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON

$$\hat{x}) \quad -f_r = Ma$$

$$\hat{y}) \quad N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$$

$$\text{ENTONCES } f_r = \mu N = \mu Mg$$

$$\Rightarrow Ma = -f_r = -\mu Mg$$

$$a = -\mu g$$

LA ACCELERACIÓN ES CONSTANTE Y APUNTA EN SENTIDO  
NEGATIVO POR LO TANTO EL BLOQUE DESACELERA

EL TRABAJO EFECTUADO POR LA FUERZA DE ROCE ES

$$W = -f_r \Delta x = -\mu Mg \Delta x < 0$$

↑  
Δx ES POSITIVO

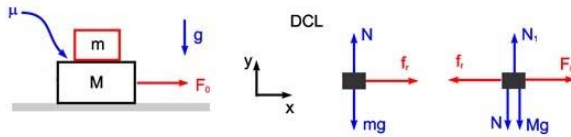
211

EL TRABAJO EFECTUADO POR LA FUERZA DE ROCE  
NO SIEMPRE ES NEGATIVO



EJEMPLO

UN BLOQUE DE MASA  $m$  DESCANSA SOBRE UN  
BLOQUE DE MASA  $M$  QUE DESLIZA SIN ROCE SOBRE  
EL PISO QUE ES TIRADO POR UNA CUERDA



APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON AL BLOQUE  $m$

$$\hat{x}) \quad f_r = ma$$

$$\hat{y}) \quad N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\text{ENTONCES } f_r = \mu mg$$

$$\Rightarrow W = f_r \Delta x = \mu mg \Delta x > 0$$

212

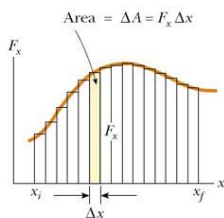
### TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

$F = F(x)$  ES DECIR, LA FUERZA DEPENDE  
DE LA POSICIÓN

→ EJEMPLOS: RESORTE  
GRAVEDAD

¿CUÁL ES EL TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA  $F(x)$   
PARA MOVER UNA PARTÍCULA DESDE  $x_i$  HASTA  $x_f$ ?

RECETA: DIVIDIR EL DESPLAZAMIENTO TOTAL  
EN UN GRAN NÚMERO DE PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS  $\Delta x$



PARA CADA INTERVALO

$$\Delta W_i = F(x_i) \Delta x$$

⇒ ÁREA DE UN RECTÁN-  
GULO DE ALTURA  
 $F(x_i)$  Y BASE  $\Delta x$

TRABAJO TOTAL  $L = \text{SUMA DE TODOS LOS } \Delta W_i$

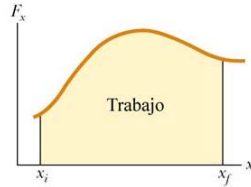
213

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N F(x_i) \Delta x$$

EN EL LÍMITE  $\Delta x \rightarrow 0$  Y  $N \rightarrow \infty$  SE TIENE

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

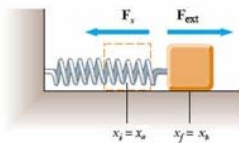
(Integral Definida)



$W \equiv \text{ÁREA BAJO LA CURVA } F(x)$

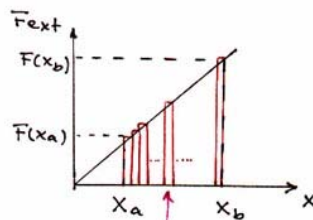
214

### Ejemplo: resorte ideal



$$F_{\text{externa}} = -F(x) = kx$$

ESTIRAMOS LENTAMENTE EL RESORTE



$$\Delta W_i = F(x_i) \Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^N F(x_i) \Delta x \equiv \text{ÁREA TRAPECIO}$$

TRABAJO PARA  
ESTIRAR EL  
RESORTE

$$W = \text{ÁREA } \square + \text{ÁREA } \triangle$$

215

$$W = (x_b - x_a) \cdot F(x_a) + \frac{1}{2} (x_b - x_a) [F(x_b) - F(x_a)]$$

$$W = (x_b - x_a) \left[ kx_a + \frac{1}{2} (kx_b - kx_a) \right]$$

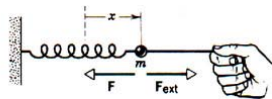
$$W = k(x_b - x_a) \left[ \frac{1}{2} x_b + \frac{1}{2} x_a \right]$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{2} k x_b^2 - \frac{1}{2} k x_a^2}$$

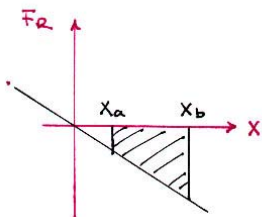
$x_b > x_a \Rightarrow W > 0 \Rightarrow$  LA FUERZA EXTERNA  
REALIZA EL TRABAJO

$x_b < x_a \Rightarrow W < 0 \Rightarrow$  EL RESORTE ARAASTRA  
LENTAMENTE AL AGENTE  
EXTERNO

216



TRABAJO SOBRE LA  
PARTÍCULA EFECTUADO =  $\int_{x_a}^{x_b} F_R dx$   
POR EL RESORTE



$$W_R = \int_{x_a}^{x_b} (-kx) dx$$

$$W_R = -\frac{k}{2} (x_b^2 - x_a^2)$$

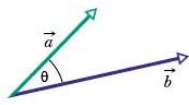
$$W_R = \frac{1}{2} k x_a^2 - \frac{1}{2} k x_b^2$$

Si  $x_a > x_b \Rightarrow$  EL RESORTE SE CONTRAE  
 $\vee W_R > 0$

Si  $x_a < x_b \Rightarrow$  EL RESORTE SE ESTIRA  
 $\vee W_R < 0$

217

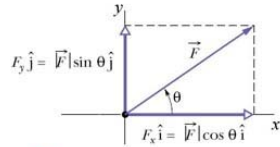
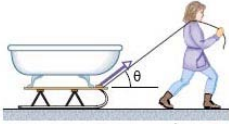
### PRODUCTO PUNTO



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

### TRABAJO EN 3-DIMENSIONES



DEFINICIÓN

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

DESPLAZAMIENTO

FUERZA CONSTANTE

$$W = F \Delta x \cos \theta = F \cos \theta \Delta x$$

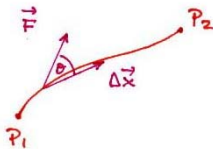
218

$W \leq 0$  si  $\vec{F} \perp \Delta \vec{x}$  ( $\theta = \pi/2$ )

$W > 0$  si  $\vec{F}$  y  $\Delta \vec{x}$  TIENEN EL MISMO SENTIDO ( $\theta = 0$ )

$W < 0$  si  $\vec{F}$  y  $\Delta \vec{x}$  APUNTAN EN SENTIDOS OPUESTOS ( $\theta = \pi$ )

FUERZA VARIABLE :



$$\Delta W_i = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

$$W = \sum \Delta W_i$$

Si  $|\Delta \vec{x}| \rightarrow 0$   $W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ← DESPLAZAMIENTO INFINITESIMAL TANGENTE A LA TRAYECTORIA  
(integral de linea)

219

## POTENCIA

SE DEFINE LA POTENCIA MECÁNICA COMO LA  
RAZÓN A LA CUAL SE HACE EL TRABAJO.

POTENCIA PROMEDIO  $P_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}$

POTENCIA INSTANTÁNEA  $P = \frac{dW}{dt}$

UNIDADES:  $J/s = W$  (watt)

OTRA UNIDAD DE POTENCIA SON LOS CABALLOS  
DE POTENCIA (HP)  $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$

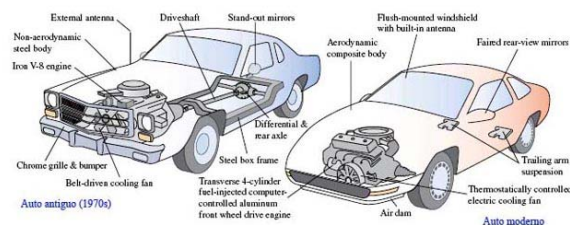
COMO  $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$   
 $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

220

1KWH ES EL TRABAJO REALIZADO EN 1 HORA  
CUANDO LA POTENCIA ES 1KW

$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 1 \text{ h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$

EJEMPLO: ENERGÍA Y EL AUTOMÓVIL



AUTOMÓVILES IMPULSADOS POR GASOLINA SON MÁQUINAS  
MUY INEFICIENTES: MENOS DEL 15% DE LA ENERGÍA  
QUÍMICA DEL COMBUSTIBLE ES USADA PARA MOVER  
EL VEHÍCULO

221



67% DE LA ENERGÍA SE PIERDE EN EL MOTOR  
10% SE PIERDE EN LA TRANSMISIÓN  
6% SE PIERDE EN EL ROCE DE LAS PARTES  
INTERNAS DEL AUTO  
4% SE PIERDE EN LAS BOMBAS DE ACEITE Y  
GASOLINA Y EN EL AIRE ACONDICIONADO

EL 13% RESTANTE SE USA PARA BALANCEAR LA  
ENERGÍA PERDIDA POR EL ROCE DE LAS RUEDAS CON  
EL SUELO Y EL ROCE CON EL AIRE

EL COEFICIENTE DE ROCE ENTRE LAS RUEDAS Y EL  
PISO ES  $\sim 0.016$

PARA UN AUTO DE 1450 KG  $\Rightarrow$  PESO = 14200 N

ENTONCES  $f_r = \mu M g = 227$  N

LA FUERZA DE ROCE CON EL AIRE ES

$$f_a = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

222

DONDE  $D$  ES EL COEFICIENTE DE ARRASTRE,  $A$  ES LA  
SECCIÓN TRANSVERSAL DEL AUTO Y  $\rho$  ES LA DENSIDAD  
DEL AIRE ( $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$ )

TÍPICAMENTE  $D \sim 0.50$  Y  $A \sim 2 \text{ m}^2$

Fuerzas de roce y potencia requerida por un automóvil típico						
$v(\text{km/h})$	$v(\text{m/s})$	$N(\text{N})$	$f_r(\text{N})$	$f_a(\text{N})$	$f_t(\text{N})$	$\mathcal{P} = f_t v(\text{kW})$
0	0	14200	227	0	227	0
32	8.9	14100	226	48	274	2.4
64	17.9	13900	222	192	414	7.4
96	26.8	13600	218	431	649	17.4
128	35.8	13200	211	767	978	35.0
160	44.7	12600	202	1199	1400	62.6

FUERZA DE ROCE TOTAL  $f_t = f_r + f_a$

POTENCIA TOTAL PARA MANTENER UNA VELOCIDAD  
CONSTANTE  $v$  ES  $\mathcal{P} = f_t v$

223

ESTA ES LA POTENCIA QUE TIENE QUE ENTREGAR  
EL MOTOR PARA QUE EL AUTO AVANCE  
POR EJEMPLO, si  $v = 96 \text{ km/h} = 26.8 \text{ m/s}$

$$P = 649 \text{ N} \cdot 26.8 \text{ m/s} = 17.4 \text{ kW}$$

$$P = P_a + P_r = f_a v + f_r v$$

$$\text{CON } P_a = 11.6 \text{ kW} \text{ Y } P_r = 5.84 \text{ kW}$$

∴ 67% DE LA POTENCIA ES USADA PARA  
COMPENSAR LA RESISTENCIA DEL AIRE

$$\text{si } v = 160 \text{ km/h} = 44.7 \text{ m/s} \Rightarrow P_a = 53.6 \text{ kW} \\ P_r = 9.03 \text{ kW}$$

∴ 86% DE LA POTENCIA ES EMPLEADA PARA  
COMPENSAR LA RESISTENCIA DEL AIRE

### TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

(CASO ESPECIAL → FUERZA CONSTANTE

$$W = F \cdot \Delta x = F (x_f - x_i)$$

$\nwarrow$  ↖  
 TRABAJO DESPLAZAMIENTO  
 TOTAL

$$\text{si } F = \text{cte} \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \text{cte}$$

RECORDEMOS QUE

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$$

EXPRESIÓN VÁLIDA PARA UN MOVIMIENTO  
CON  $a = \text{cte}$

ENTONCES

$$W = ma(x_f - x_i)$$

$$W = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

ENERGÍA CINÉTICA  $\rightarrow$   $K \equiv \frac{1}{2} m v^2$

POR LO TANTO

$W = \Delta K$

TEOREMA  
TRABAJO - ENERGÍA



RELACIONA LA ENERGÍA CINÉTICA  
DE UNA PARTÍCULA CON EL  
TRABAJO TOTAL

$K$  REPRESENTA LA CAPACIDAD DE UNA PARTÍCULA  
DE REALIZAR TRABAJO DEBIDO A SU VELOCIDAD

$W > 0 \Rightarrow$  ENERGÍA CINÉTICA AUMENTA

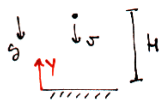
$W < 0 \Rightarrow$  ENERGÍA CINÉTICA DISMINUYE

EL TEOREMA TRABAJO - ENERGÍA ES VÁLIDO INCLUSO PARA  
FUERZAS QUE DEPENDEN DE LA POSICIÓN EN 3D

226

### EJEMPLOS

①



$$W_g = -mg \Delta y = -mg(0 - H)$$

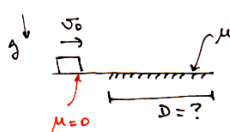
$$W_g = mgH$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

$$\Delta K = W \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mgH$$

$$v = \sqrt{2gH}$$

② FUERZA DE ROCE



$$W_g = 0 \quad (\vec{g} \text{ es } \perp \text{ al desplazamiento})$$

$$W_{roce} = -f_r \cdot D = -\mu mg D$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu mg D \Rightarrow D = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

227

## Energía Potencial y Conservación de Energía

Los habitantes prehistóricos de la Isla de Pascua esculpieron cientos de estatuas de piedra (moais) en las laderas de sus volcanes y luego las movieron a diferentes sitios alrededor de toda la isla. La forma cómo ellos pudieron mover estas gigantescas estatuas tanto como 10 km sin la ayuda de maquinas sofisticadas ha sido un tema de amplio debate, con muchas delirantes teorías acerca de la fuente de la energía empleada.



¿Cómo pudo ser realizada esta tarea usando sólo medios primitivos?

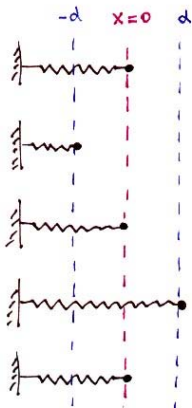


228

### FUERZAS CONSERVATIVAS

#### EJEMPLOS

RESORTE  $W_R = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$



$$W_R = 0 - \frac{1}{2} k d^2 = -\frac{1}{2} k d^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} k d^2 - 0 = \frac{1}{2} k d^2$$

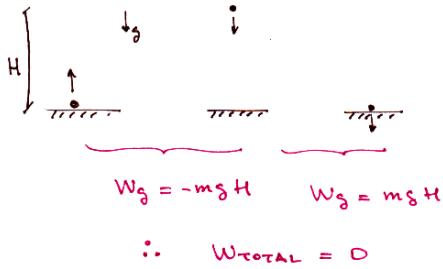
$$W_R = 0 - \frac{1}{2} k d^2 = -\frac{1}{2} k d^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} k d^2 - 0 = \frac{1}{2} k d^2$$

$$W_{TOTAL} = 0$$

229

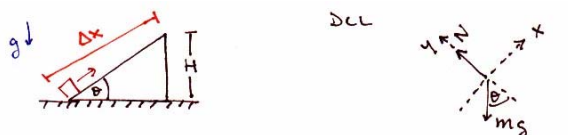
### GRAVEDAD (CERCA DE LA SUP. TERRESTRE)



UNA FUERZA SE DICE CONSERVATIVA SI EL TRABAJO TOTAL EN CUALQUIER TRAYECTORIA CERRADA ES CERO

OTRA MANERA DE DECIRLO ES: UNA FUERZA ES CONSERVATIVA SI  $W$  ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA QUE UNE DOS PUNTOS

230



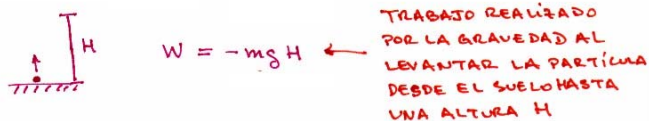
$N$  y  $mg \cos \theta$  NO EFECTÚAN TRABAJO

$$\Rightarrow W = -mg \sin \theta \Delta x$$

PERO  $\sin \theta = \frac{H}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x \sin \theta = H$

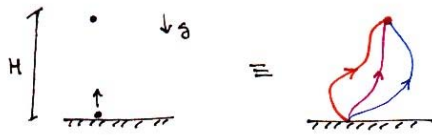
$$W = -mgH$$

POR OTRO LADO



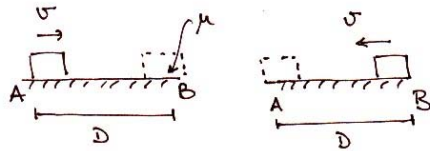
231

EN GENERAL,  $W_g$  ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA. SÓLO DEPENDE DE LA ALTURA O DIFERENCIA DE ALTURA  $H$ .



FUERZA NO-CONSERVATIVA

EJEMPLO FUERZA DE ROCE



$$W_{roce} = -\mu mg D \quad W_{roce} = -\mu mg D$$

$$W_{total} = -2\mu mg D \neq 0$$

232

### ENERGÍA POTENCIAL

PARA UNA FUERZA CONSERVATIVA SE DEFINE EL CAMBIO DE ENERGÍA POTENCIAL POR

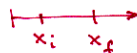
$$\Delta U = -W$$

EJEMPLOS:

RESORTE



$$W_R = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$



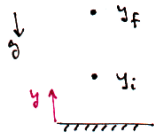
$$\Delta U = U_f - U_i = -\left(\frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2\right)$$

$$U_f - U_i = \frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2$$

$$\therefore U_{RESORTE} = \frac{1}{2} k x^2$$

233

### FUERZA DE GRAVEDAD



$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = -W_g$$

$$U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$$

$$\therefore \boxed{U_{\text{gravedad}} = mgy} \quad \text{ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL}$$

EN GENERAL,  $U$  REPRESENTA LA CAPACIDAD DE UNA PARTÍCULA PARA REALIZAR TRABAJO DEBIDO A SU POSICIÓN

ADEMÁS SÓLO SE PUEDE MEDIR  $\Delta U$ , LA DIFERENCIA DE ENERGÍA POTENCIAL ENTRE DOS POSICIONES