

### Pauta ejercicio 11

- a) ¿En qué porcentaje se reduce el campo gravitacional (aceleración de gravedad) con respecto a la superficie terrestre en un vuelo comercial que viaja a 10 Km de altitud?
- b) ¿Cuánto vale el mismo campo en el interior de un satélite en órbita circular a 200 km de altura?
- c) En el caso b, determine la energía que es necesario proporcionarle al satélite, inicialmente en reposo en un punto en el ecuador terrestre, para ponerlo en órbita a 200 km de altura, por unidad de masa de satélite.

Parte a)

$$g = GM / R^2 = g \text{ en superficie terrestre} = 9,829 \text{ m/s}^2$$

$$g = GM / (R + h)^2 = g \text{ a una distancia } h \text{ sobre la superficie terrestre} = 9,799 \text{ m/s}^2$$

$$\% \text{ reducción} = (1 - 9,799/9,829) 100 = 0.31\%$$

Parte b)

Usando la segunda fórmula anterior evaluamos en  $h = 200000 \text{ mts}$  (UNIDADES M.K.S) Da  $g = 9.24 \text{ m/s}^2$

Parte c)

La energía es cinética + potencial =  $\frac{1}{2} mv^2 - GMm / r$

Pero en un Mov. Circular uniforme (radio  $r$ ) se tiene fuerza =  $ma$  donde la aceleración es  $v^2 / r$  y la fuerza es la gravitacional =  $GMm / r^2$

Paréntesis M.C.U.

(Recuerden que para que exista un mov. Circular tiene que haber una fuerza que lo mantenga, la cual apunta hacia el centro del círculo. La aceleración en un circular uniforme se obtiene usando geometría – se restan vectores velocidad “muy cercanos” y se divide por delta  $t$  con delta  $t$  chico – Se demuestra entonces que esta aceleración apunta hacia el centro del círculo y vale en módulo  $v^2 / r$  ,

viejo resultado que uds. conocen del colegio. La fuerza por ende va a apuntar hacia el centro del círculo y varía según la situación física. Por ejemplo:

- 1- Piedra que gira atada a un lazo (boleadoras). La fuerza es la tensión de la cuerda.
- 2- Movimiento de la Luna en torno a la Tierra. La fuerza es la gravitacional.
- 3- Niño parado en el borde de un carrusel. La fuerza es el roce que existe entre superficie carrusel y zapatos del niño.
- 4- Un auto que dobla una curva: La fuerza al igual que el caso anterior es el roce entre camino y ruedas. (Es imposible dar una curva sobre un terreno resbaladizo, por eso se hace más difícil manejar cuando llueve)
- 5- Si se vienen por Av. Matta en micro, tienen que pasar necesariamente por la zona de curvas. Cuando la micro toma la curva, ustedes se sujetan ya sea en la pared de la micro o en la señora de al lado, o se agarran de las manillas, además del roce que existe entre uds. y el asiento y el piso. Esas son las fuerzas que los mantienen a Uds. en un Mov. Circular. Imagínense que pasaría si la micro no tuviera paredes, no tuviera asientos ni manillas ni señora al lado. Aún más supongamos que ni siquiera hubiera roce (por ej. una micro muy encerada ) Entonces no habrían fuerzas para que uds. mantengan un movimiento circular. Resultado: Apenas la micro toma la curva, ustedes salen disparados “ por la tangente” (esta es la ley de inercia).

Cierre paréntesis M.C.U.

Retomando, tenemos entonces que en un M.C.U. gravitacional se tiene:

$$GMm / r^2 = m v^2 / r \quad (*)$$

Es decir se puede despejar la velocidad en función de r. Luego se puede reemplazar el término de energía cinética por

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} GMm / r$$

Reemplazando en la expresión de la energía, se obtiene:

$$\text{Energía de un M.C.U. gravitacional} = \frac{1}{2} GMm / r - GMm / r = - \frac{1}{2} GMm / r$$

iiii Listo. !!!! Inicialmente el satélite está en reposo sobre el ecuador terrestre y la Tierra está rotando. Entonces el satélite también tiene un mov. Circular uniforme cuya velocidad es  $\omega \cdot R$  donde  $\omega$  es la veloc. Angular de la Tierra  $= 2 \pi / 86400 \text{ seg}^{-1}$  y  $R = 6370000 \text{ mts.}$  Esta velocidad en general depende de la latitud y vale  $\omega \cdot R \cos(\text{latitud})$  - en el polo ( $\text{lat} = 90^\circ$ ) no hay Mov. Circular - y como estamos en el ecuador el radio de giro es el radio de la Tierra ( $\text{latitud} = 0^\circ$ ). Luego la veloc. de este M.C.U. es  $463.2 \text{ m/s}$

No es (como algunos pusieron)  $E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m v^2 - GMm / R$   ~~$= - GMm / R^2$~~

Una observación: Si de la ecuación (\*) despejan  $v$  en función de  $r$  para un mov. Circular da:  $v = \sqrt{GM / r}$ . Ojo: Esto es para una masa puntual. Si calculan esta velocidad para  $r$  el radio de la Tierra, da  $7913 \text{ m/s}$  que es bastante mayor que  $463.2 \text{ m/s}$ . Si se paran en un cerro alto y tiran una piedra con una velocidad horizontal de  $7913 \text{ m/s}$  entonces van a dejar la piedra en órbita ( ¡watch your head!).

Entonces :  $E_{\text{inicial}} / m = \frac{1}{2} 463.2^2 - GM / R = -62.509.050 \text{ J/ Kg}$

La Energía final del satélite (por unidad de masa) es  $-1/2 GM / (R + 200000)$   
 $= -30.355.100 \text{ J/Kg}$

Luego, la Energía que hay que entregarle al satélite es  $E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = 32.154.000 \text{ J/ Kg.}$