

MOMENTUM ANGULAR

Volvamos a la ecuación fundamental de la dinámica para una partícula :

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

donde \vec{F} representa a la resultante de fuerzas que actúa sobre ella, m , su masa, es un parámetro inercial constante para velocidades bajas comparadas con la velocidad de la luz y finalmente \vec{a} es su aceleración, un concepto cinemático indispensable en la descripción del movimiento.

Sabemos bien que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ y $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ corresponden a las tasas de variación temporal de la velocidad y posición respectivamente

La ecuación (1) podemos reescribirla como :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{o aun como} \quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \text{ ya que } m = \text{cte.}$$

donde $m\vec{v} = \vec{p}$ se ha definido anteriormente como "momento lineal" de la partícula o también "cantidad de movimiento" de ella.

En lo que sigue transformaremos esta última ecuación para fines que irán aclarándose a medida que avancemos en nuestro desarrollo de la dinámica. Para esto, multipliquemos vectorialmente esta ecuación por el vector \vec{r} y en particular esta multiplicación la haremos por la izquierda (recordemos que el producto vectorial no es conmutativo). Así,

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Agregando un término nulo al segundo miembro, específicamente

el término $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$ se tiene:

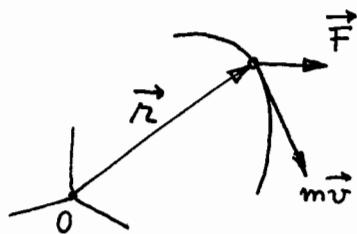
$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{mv}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \quad (2)$$

El segundo miembro se puede ahora reescribir valiéndose de las propiedades conocidas de las derivadas:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{mv}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$$

De este modo, la ecuación (2) se transforma en

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) \quad (3)$$



\vec{r} es el vector posición de la partícula

Nótese los productos vectoriales

$\vec{r} \times \vec{F}$ y $\vec{r} \times m\vec{v}$ que definen dos nuevos

vectores:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{"momento de } \vec{F} \text{ respecto del origen O"}$$

$$\text{y} \quad \vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{"momento del momentum lineal } m\vec{v} \text{ respecto de O"}$$

En el segundo caso se habla también de momento de la cantidad de movimiento, momento cinético o más generalmente, MOMENTUM ANGULAR de la partícula respecto del punto O. Familiarmente se suele hablar del "momento angular".

En esta forma, la ecuación (3) se representa como

$$\boxed{\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}} \quad (4)$$

"El momento de la resultante es igual a la tasa de variación temporal del momentum angular de la partícula."

Algunos se refieren a la ecuación (4) como la "ecuación rotacional" de la partícula, en este caso.

Como $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots$ resultante de las fuerzas \vec{F}_i .

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots) \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_i + \dots \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_i + \dots\end{aligned}\quad (5)$$

Entonces, en el caso de la partícula, el momento resultante \vec{M} es igual a la suma vectorial de los momentos de las fuerzas componentes.

Por otra parte, la ecuación vectorial (4) puede descomponerse en el caso más general, en tres ecuaciones escalares correspondientes:

$$M_x = \frac{dL_x}{dt} \quad ; \quad M_y = \frac{dL_y}{dt} \quad ; \quad M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad (6)$$

De (4), por ejemplo, cuando se da el caso que $\vec{M} = \vec{0}$, se desprende que

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0} \quad \text{y por lo tanto, que } \vec{L}_0 = \text{cte.}$$

En este caso, por tratarse de un vector constante, son constantes su magnitud L_0 y su dirección.

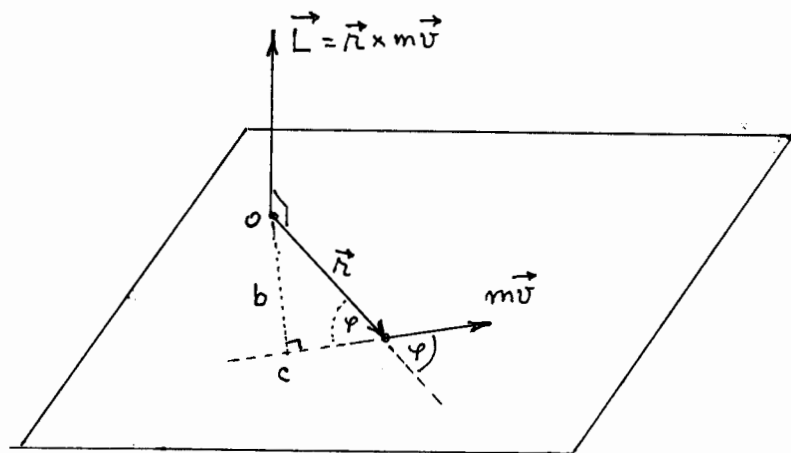
Si se diera el caso en que una de las componentes del momento \vec{M} fuera nula, por ejemplo F_x , entonces L_x es constante.

En cuanto al módulo del vector $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, este se expresa como:

$$L = r \cdot m v \sin \varphi$$

donde φ es el ángulo que forman los vectores \vec{r} y $m\vec{v}$.

Gráficamente, el vector \vec{L} es perpendicular al plano definido por los vectores \vec{r} y $m\vec{v}$.



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\begin{aligned} |\vec{L}| = L &= r(mv)\sin\varphi \\ &= (r\sin\varphi)mv \\ &= b \cdot mv \end{aligned}$$

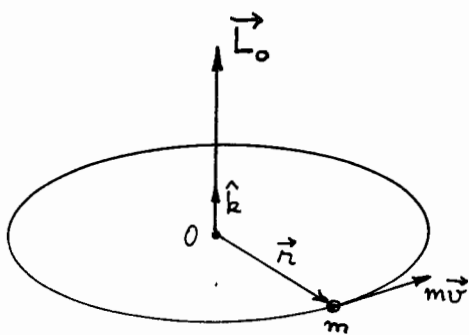
Se observa que el módulo del vector L se puede calcular

en forma práctica multiplicando el módulo del vector $m\vec{v}$ por la distancia $OC = b$ desde el origen a la línea de acción de $m\vec{v}$.

En el sistema SI de unidades el momento de una fuerza se expresa en $N \cdot m = kg \cdot m^2/s^2$ y el momentum angular en $kg \cdot m^2/s$.

Comentario. Posiblemente de todas las cantidades físicas ("magnitudes físicas") presentadas hasta aquí, el momentum angular sea la que aparece como más extraña y artificial por el hecho de apartarse más o advertirse como más lejana a nuestros sentidos. El estudio de situaciones más complejas ha hecho a menudo necesario introducir nuevas cantidades físicas más apropiadas para su análisis, y su aceptación se produce en su repetida utilización, donde se van poniendo de manifiesto las ventajas de su uso. Esto es parte del esfuerzo del intelecto humano en su eterna búsqueda por comprender y describir el universo que lo rodea.

Ejemplos ilustrativos en dos dimensiones.



1. Movimiento circular uniforme.

La fuerza sobre la partícula m apunta permanentemente hacia el centro O de la trayectoria.

Si expresamos esta fuerza como

$$\vec{F} = -F\hat{r}$$

su momento respecto del punto O es

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= r\hat{r} \times (-F)\hat{r} \\ &= -Fr\hat{r} \times \hat{r} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Se observa que el momento $\vec{M}_O = \vec{0}$, de modo que de la ecuación rotacional $\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ se desprende que

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \vec{cte}}$$

En este movimiento resulta que el momentum angular \vec{L}_O es un vector constante (magnitud y dirección constante), el que aparece indicado en la figura:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\begin{aligned}\text{Su módulo es } L_O &= r \cdot mv \sin 90^\circ \\ &= rmv\end{aligned}$$

Se confirma que L_O es constante, pues $r = cte$ y $v = cte$.

Además, se observa que \vec{L}_O es perpendicular al plano de la trayectoria, ya que es normal a los vectores \vec{r} y $m\vec{v}$.

El módulo L_0 lo podemos expresar también en términos de la rapidez angular ω , valiéndonos de su relación con la rapidez lineal v , esto es, $v = r\omega$.

$$\text{Obtenemos } L_0 = m r^2 \omega = cte.$$

Por supuesto, este mismo resultado lo obtenemos si adoptamos un sistema de coordenadas polares, aprovechando que el movimiento es plano:

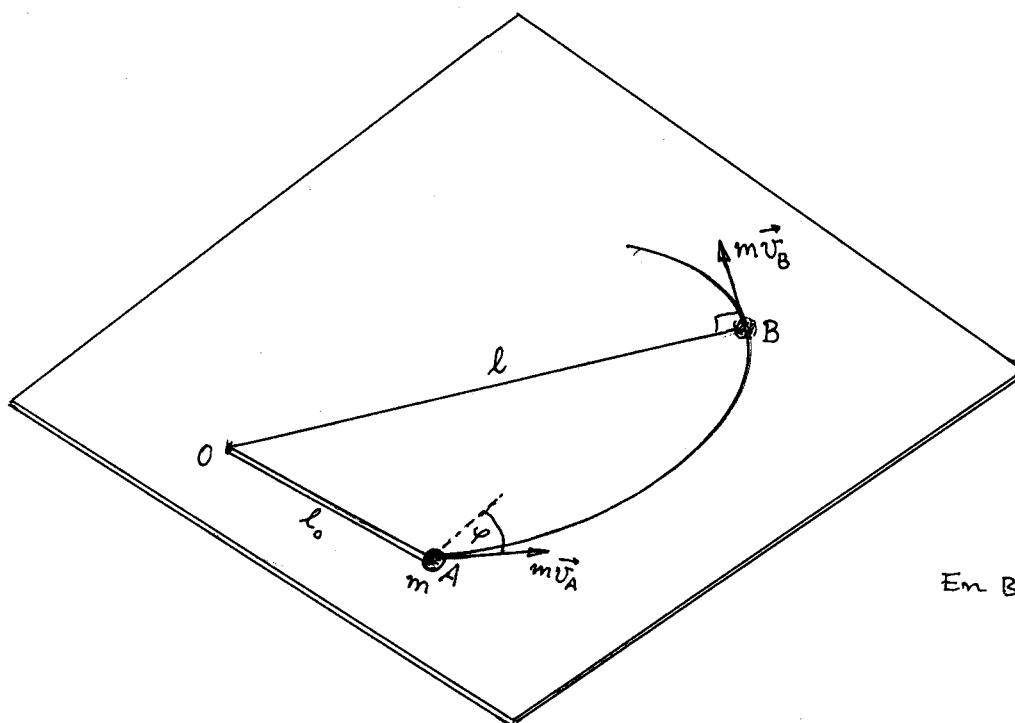
$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= \vec{r} \times m \vec{v} \\ &= r \hat{r} \times m r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad \text{donde } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ &= m r^2 \dot{\theta} \hat{r} \times \hat{\theta} \\ &= m r^2 \dot{\theta} \hat{k}\end{aligned}$$

$$\text{o, finalmente, } \vec{L}_0 = m r^2 \omega \hat{k}$$

y su módulo, por supuesto, es $L_0 = m r^2 \omega$.

El caso que hemos analizado es un caso trivial que se presta para familiarizarnos con esta cantidad física. Además, presenta un movimiento en el que el momento angular es "una constante del movimiento". Se suele aludir a este hecho diciendo que el momentum angular "se conserva".

2. Una partícula de masa m se encuentra ligada a un punto O de un plano liso mediante una banda elástica ideal de longitud natural l_0 . Inicialmente se le imparte a la partícula, encontrándose ésta en el punto A , a la distancia l_0 de O , una velocidad v_A paralela al plano y de dirección dada por el ángulo φ en la figura. Si en su trayectoria posterior m alcanza en cierto instante una máxima distancia $OB = l$ al origen, determinar el valor de la constante elástica k .



La partícula parte desde el reposo en A con velocidad \vec{v}_A . La fuerza que le aplica el elástico es del tipo $\vec{F} = -k\vec{r}$, donde k es la constante elástica. Se observa esta fuerza es del tipo llamado "central", pues apunta permanentemente hacia el origen O y por lo tanto su momento respecto de ese punto es nulo. De acuerdo a lo visto en el ejemplo anterior, su momento angular \vec{L}_O es por lo tanto una constante del movimiento, lo que nos permite escribir para los puntos A y B de la trayectoria: $L_O(A) = L_O(B)$

$$o \quad l_0 \cdot m v_0 \cos \varphi = l m v_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \frac{l_0}{l} v_A} \quad (*)$$

Además, como la fuerza elástica es conservativa: $K(A) + U(A) = K(B) + U(B)$

Como $U(A) = 0$ por encontrarse el elástico con su longitud natural,

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \quad (**)$$

De (*) y (**) se obtiene finalmente:

$$\boxed{k = \frac{l + l_0}{(l - l_0) l^2} m v_A^2}$$