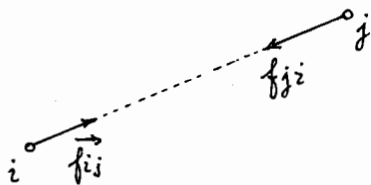


SISTEMAS DE PARTICULAS.

Consideremos un conjunto de puntos materiales que interactúan atrayéndose o repeliéndose mutuamente mientras se desplazan en una cierta región del espacio. Consideraremos solamente el caso de fuerzas de interacción que se ejerzan entre pares de partículas según las rectas que las unen y que sean del tipo acción-reacción:



Para dos partículas cualesquiera i y j , llamaremos

\vec{f}_{ij} = fuerza con que j actúa sobre i

\vec{f}_{ji} = fuerza con que i actúa sobre j

Se tiene entonces : $\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = \vec{0}$

A estas fuerzas de interacción las denominaremos "fuerzas interiores" del sistema. Junto a éstas pueden actuar sobre cada partícula o sobre algunas de ellas diversas fuerzas externas al sistema como por ejemplo la fuerza peso. A la resultante de las fuerzas exteriores que actúa sobre la i -ésima partícula del sistema la designaremos como \vec{F}_i .

De esta manera, la ecuación de movimiento de una partícula genérica del sistema (i -ésima partícula o partícula de orden i), de masa m_i , tiene la forma:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \quad (1)$$

donde $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ es su aceleración.

Para cada una de las partículas existe una ecuación similar de modo que sumando miembro a miembro las n ecuaciones se tiene :

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \quad (2)$$

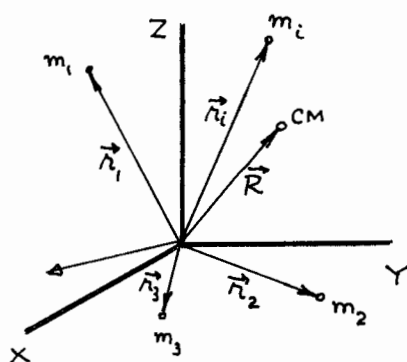
La doble sumatoria del segundo miembro $\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \vec{0}$ ya que incluye términos del tipo $\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = \vec{0}$, $\forall i, j$, de manera que se anulan de a pares.

Poniendo $\sum_i \vec{F}_i \equiv \sum \vec{F}_{ext}$ para poner énfasis en que se trata de la suma vectorial de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre las componentes del sistema, la ecuación (2) toma la forma :

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_{ext} \quad (3)$$

Centro de masa del sistema.

El conjunto de las posiciones instantáneas de las partículas de un sistema constituye una configuración, la que se encuentra en permanente evolución durante el movimiento de las mismas.



$\vec{r}_i(t)$: vector posición de la i -ésima partícula

$\vec{R}(t)$: vector posición del centro de masa del sistema

Para cada configuración del sistema se define un punto del espacio como

su centro de masa mediante el vector posición \vec{R} :

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_i \vec{r}_i + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4)$$

Llamando $\sum_{i=1}^n m_i = M$ (5)

que representa a la masa total del sistema, la ecuación (4) la escribimos como

$$M \vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (6)$$

De la definición se desprende que al evolucionar la configuración del sistema con el transcurso del tiempo, el centro de masa se desplaza en forma continua.

Ahora bien, tanto \vec{R} como los \vec{r}_i son funciones del tiempo, de modo que $\frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}} = \vec{V}_{CM}$ representa la velocidad del centro de masa

y $\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \ddot{\vec{R}} = \vec{a}_{CM}$ corresponde a la aceleración del centro de masa

En esta forma, derivando dos veces respecto del tiempo la ecuación (6) se obtiene:

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i \quad (7)$$

Pero, según (3), $\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_{ext}$

de modo que

$$\boxed{M \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}} \quad (8)$$

Esta última ecuación tiene la forma de la ecuación de movimiento de una partícula lo que conduce a interpretarla como la ecuación de movimiento del centro de masa :

" El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total del mismo estuviese concentrada en dicho punto moviéndose con él bajo la acción de todas las fuerzas exteriores aplicadas directamente sobre ella "

Esto equivale a tratar al centro de masa como si se tratara de una partícula de masa M .

Momentum lineal de un sistema de partículas,

El momentum lineal de la i -ésima partícula de un sistema es

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

de modo que el momentum lineal total del sistema es igual a la suma vectorial

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Por otra parte, de la definición de centro de masa como $M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$ se obtiene, derivando respecto del tiempo,

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\text{o} \quad M \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

de modo que

$$\boxed{\vec{P} = M \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i} \quad (9)$$

Dentro del esquema de tratar al centro de masa como si se tratara de una partícula de masa M , entonces $M\vec{V}_{cm}$ corresponde al "momentum lineal del centro de masa". De allí que la ecuación (9) muestra que el momentum lineal del sistema de partículas es igual al momentum lineal de su centro de masa.

Ahora, si derivamos la ecuación (9) respecto del tiempo :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_{cm}$$

pero, según (8), $M\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}$, por lo que la tasa de variación temporal del momentum lineal \vec{P} queda expresada :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \quad (10)$$

En el caso en que $\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \vec{c}_1 t \Rightarrow \vec{V}_{cm} = \vec{c}_1$

Las ecuaciones escalares de trabajo, en coordenadas cartesianas, correspondientes a las ecuaciones vectoriales (8) y (10) son, como puede demostrarse fácilmente,

$$X_{cm} = \frac{1}{M} \sum F_x^{ext} ; \quad Y_{cm} = \frac{1}{M} \sum F_y^{ext} ; \quad Z_{cm} = \frac{1}{M} \sum F_z^{ext}$$

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum F_x^{ext} ; \quad \frac{dP_y}{dt} = \sum F_y^{ext} ; \quad \frac{dP_z}{dt} = \sum F_z^{ext}.$$

Si el sistema de partículas estuviera restringido a moverse en un plano, entonces, obviamente, el número de ecuaciones escalares se reduce a solo dos en cada caso.

Momentum angular de un sistema de partículas.

El momentum angular de la partícula genérica m_i del sistema (partícula i -ésima o partícula de orden i), es

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (11)$$

El momentum angular del sistema de partículas es igual a la suma vectorial

$$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

donde los vectores posición \vec{r}_i están referidos a un mismo origen fijo O del espacio.

Se demuestra que la tasa de variación del momentum angular total \vec{L}_0 del sistema es

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0} \quad (12)$$

donde $\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ y \vec{F}_i es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan directamente sobre la partícula de orden i .

La ecuación (12) es la ecuación rotacional del sistema.

Como siempre, las ecuaciones escalares de trabajo para el caso general en tres dimensiones es, en coordenadas cartesianas es:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \quad ; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y \quad ; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z$$

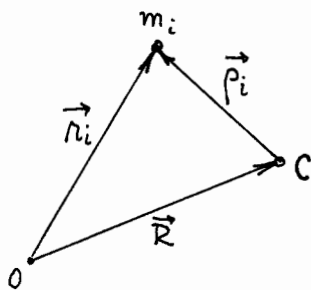
$$\text{ya que } \vec{L}_0 = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{M}_0 = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}$$

De (12) se desprende que si $\vec{M}_O = \vec{0}$, entonces $\vec{L}_O = \vec{cte.}$, ésto es, que el momentum angular \vec{L}_O del sistema "se conserva". En otras palabras, es una constante del movimiento del sistema.

Las ecuaciones (8) y (12) son los pilares en el estudio del movimiento de sólido invariable, ya que éstos constituyen un caso especial de sistema de partículas: sus distancias permanecen constantes.

1er Teorema de König.

Si en vez de elegir un punto fijo del espacio como punto de referencia para especificar los vectores posición de las partículas que componen un sistema se elige un punto móvil especial como es su centro de masa, se tiene una relación vectorial mostrada en la figura:



\vec{p}_i = vector posición de la partícula m_i referido al centro de masa C del sistema.

\vec{r}_i = vector posición de m_i referido al punto fijo O.

\vec{R} = vector posición del centro de masa C referido a O.

Del triángulo vectorial se desprende que

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{p}_i \quad (13)$$

Además, el momentum angular del sistema respecto de C es

$$\vec{L}_C = \sum_i \vec{p}_i \times m_i \dot{\vec{p}}_i, \quad \text{donde } \dot{\vec{p}}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \text{ es la velocidad de } m_i \text{ relativa al centro de masa.}$$

Se deduce de todo ésto (omitimos la demostración) que la relación entre \vec{L}_O y \vec{L}_C es:

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{R} \times M \vec{V}_{CM}} \quad (14)$$

1er Teo. de KÖNIG

$\vec{R} \times M \vec{V}_{CM}$ corresponde al "momentum angular del centro de masa" relativo al punto fijo O.

de donde se llega finalmente a que:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C} \quad (15)$$

La ecuación (15) resulta idéntica a la ecuación (12), de donde se desprende que se pueden usar indiferentemente. Sin embargo, la forma (15) en muchas situaciones particulares resulta más ventajosa.

En lo que respecta a las ecuaciones escalares correspondientes, los ejes cartesianos elegidos, con origen en el centro de masa C, deben mantener orientaciones fijas en el espacio (no deben rotar).

Igualmente, si $\vec{M}_C = \vec{0}$, entonces $\vec{L}_C = \vec{cte}$.

Energía cinética de un sistema de partículas.

La energía cinética es una cantidad escalar. Llamando

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

a la energía cinética de la partícula de orden i, la energía cinética total del sistema es igual a la suma

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Reemplazando $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\dot{p}}_i$ obtenido de la ec. (13) al derivarla respecto del tiempo, se llega luego de una serie de transformaciones a que:

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{p}_i^2 \quad (16)$$

2º Teo. de KÖNIG

El término $\frac{1}{2} M V_{CM}^2$ corresponde a la "energía cinética del centro de masa", mientras que $\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{p}_i^2$ es la energía cinética del sistema, relativa al centro de masa.

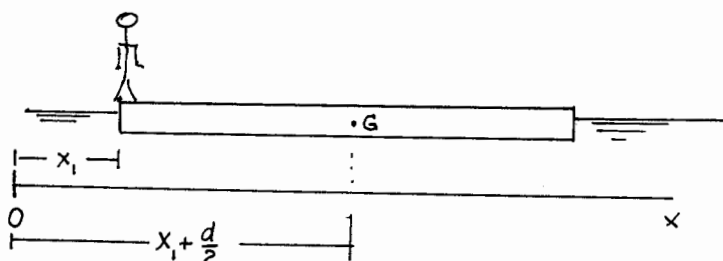
Finalmente, se puede demostrar que para el sistema rige también el teorema del trabajo-energía cinética, ésto es, que

$$W = \Delta K$$

donde W es el trabajo de toda las fuerzas, tanto interiores como exteriores, que actúan sobre las componentes del sistema, al pasar éste desde una cierta configuración a otra.

Problemas ilustrativos.

1. Un bañista se encuentra de pie en el extremo de una plataforma rectangular de longitud d que flota en el centro de una piscina de gran extensión. Si el bañista camina hasta el extremo opuesto de la plataforma, calcular el desplazamiento de ésta sobre el agua, sabiendo que las masas son m y M respectivamente.



Las fuerzas puestas en juego mientras el hombre camina son fuerzas de roce entre sus pies y la superficie de la plataforma, por lo tanto se trata de fuerzas internas del sistema. Las fuerzas exteriores correspondientes a los pesos Mg y mg son perpendiculares a la dirección del movimiento, así como el empuje E del agua y la reacción normal N sobre el hombre, ésta última también interna.

Por ésto, el centro de masa C del sistema hombre-plataforma no se mueve en este proceso y por lo tanto $x_c = \text{cte.}$

Entonces, inicialmente la posición del centro de masa del sistema cumple la relación:

$$(m+M)x_c = m x_1 + M(x_1 + \frac{d}{2})$$

Al llegar el hombre al otro extremo:

$$(m+M)x_c = m(x_2 + d) + M(x_2 + \frac{d}{2})$$

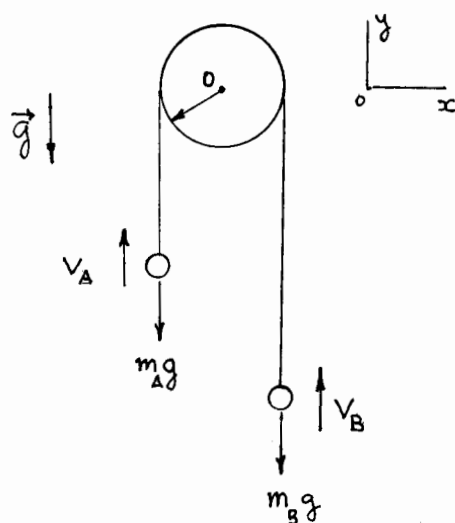
Iguando los segundos miembros se obtiene

$$(x_2 - x_1) = \Delta x = -\frac{m}{M+m} d$$

2. Dos estudiantes A y B se encuentran suspendidos sujetos cada uno a uno de los extremos de una cuerda ideal que pasa por una polea lisa, de radio r y masa despreciable. El estudiante B se encuentra a una distancia h por debajo de A. Tratando de alcanzar a A el estudiante B trepa por la cuerda con una velocidad v_B relativa a ella.

a) Si $m_A = m_B$ determinar si B logra alcanzar a A.

b) Si $m_A = 2m_B$ estudiar el movimiento.



a) Momento M_o de las fuerzas exteriores es nulo:

$$M_o = m_A g r - m_B g r = 0$$

$$\therefore \frac{dL_o}{dt} = 0 \rightarrow L_o = \text{cte.}$$

$$\text{En } t=0, L_o(0) = 0 \therefore L_o(t) = 0$$

En $t=0$, B y A en reposo

En $t > 0$ B sube

Si V_A y V_B son las velocidades absolutas de A y B:

$$L_o(t) = m_B V_B r - m_A V_A r = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = V_B}$$

Como las velocidades absolutas son iguales, A no puede alcanzar a B pues ambos se elevan en igual medida simultáneamente.

Ahora bien, $V_B = v_B - V_A$ donde v_B es la velocidad de B relativa a la cuerda.

$$\therefore V_A = v_B - V_A \rightarrow \boxed{V_A = \frac{1}{2} v_B} \text{ velocidad absoluta de A y de la cuerda.}$$

b) Si $m_A = 2m_B$ entonces el momento $M_0 \neq 0$ y L_0 no se conserva.

$$\text{De } M_0 = \frac{dL_0}{dt} \rightarrow dL_0 = M_0 dt \quad (*)$$

Para este caso, por simplicidad, pensemos que en $t=0$, $y_A(0)=0$ y $y_B(0)=0$.

Ahora, en el intervalo de tiempo $\Delta t = t - 0$, $M_0 = \text{cte}$:

$$\begin{aligned} M_0 &= m_A g r - m_B g r \\ &= 2m_B g r - m_B g r \end{aligned}$$

$$M_0 = m_B g r$$

$$\therefore \Delta L_0 = M_0 \Delta t$$

$\therefore L_0(t) = M_0 t$ ya que $L_0(0)=0$ pues en $t=0$, A y B están en reposo.

$$\therefore m_B V_B r - m_A V_A r = m_B g r t$$

$$m_B V_B r - 2m_B V_A r = m_B g r t$$

$$\therefore V_A = \frac{1}{2} V_B - \frac{1}{2} g t$$

$$\therefore V_A = \frac{1}{2} (v_B - V_A) - \frac{1}{2} g t$$

$$\boxed{V_A = \frac{1}{3} v_B - \frac{1}{3} g t}$$

3. Dos partículas idénticas, de masas $m_1 = m_2$, unidas mediante una varilla rígida de masa despreciable y longitud d descansan sobre una superficie horizontal lisa. En $t=0$, la partícula m_1 arranca con velocidad v_0 perpendicularmente al eje $m_1 - m_2$.

- Determinar el tiempo que tarda el sistema en rotar en $\pi/2$.
- Calcular para ese instante las velocidades v_1 y v_2 de ambas partículas.
- Calcular la energía cinética del sistema.

Movimiento del centro de masa.

El plano es liso, luego no hay fuerzas de roce.

Los pesos mg de las partículas y las reacciones normales N_1 y N_2 son perpendiculares al plano.

$$\therefore \sum F_x^{\text{ext}} = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y^{\text{ext}} = 0$$

de modo que $a_x = 0$ y $a_y = 0 \Rightarrow V_{cx} = \text{cte}$ y $V_{cy} = \text{cte}$

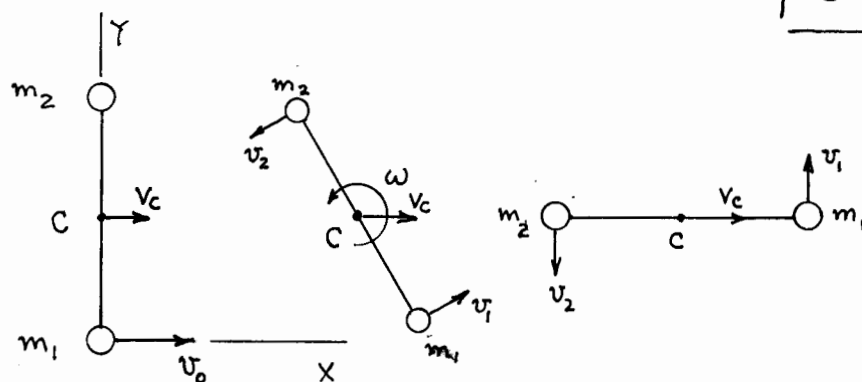
$$2m V_{cx} = m_1 v_0 + m_2 \cdot 0$$

$$\boxed{V_{cx} = \frac{v_0}{2}}$$

$$2m V_{cy} = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0$$

$$V_{cy} = 0$$

El centro de masa C se mueve con velocidad constante, igual a su velocidad en el instante inicial: $\boxed{\vec{V}_C = \frac{v_0}{2} \hat{x}}$



— Rotación en torno al centro de masa C.

El movimiento del sistema es plano (en el plano $x-y$). Por lo tanto, el momento respecto de C de las fuerzas exteriores no da componente en dirección perpendicular a este plano: $M_{Cz} = 0$.

Por lo tanto, $\frac{dL_c}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{L_c = \text{cte}}$

Luego, $L_c(0) = L_c(t)$; $v_1 = v_2 = v$ velocidades de m_1 y m_2 relativas al centro de masa.

$$L_c(t) = 2 \cdot m v \cdot \frac{d}{2} = m v d$$

$\omega = \frac{v}{d/2}$ velocidad angular del sistema en torno a C.

$$L_c(0) = m v_0 \frac{d}{2}$$

$$\therefore m v d = m v_0 \frac{d}{2} \Rightarrow v = \frac{v_0}{2} \therefore \boxed{\omega = \frac{v_0}{d}} = \text{cte.}$$

El sistema gira con velocidad angular constante ω en torno a C mientras su centro de masa C se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme con $V_c = \frac{v_0}{2}$.

a) Al alcanzar por primera vez la posición paralela al eje x el sistema ha rotado en $\pi/2$. Como $\theta = \omega t$, ya que ω es constante,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{v_0}{d} t^* \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\pi d}{2 v_0}}$$

tiempo que tarda el sistema en rotar en $\pi/2$ desde $t=0$

La distancia a que se encuentra C en este instante, a su posición inicial es:

$$x_c = V_c \cdot t^* = \frac{v_0}{2} \cdot \frac{\pi d}{2 v_0} = \frac{\pi d}{4}.$$

b) $\vec{v}_1 = v_1 \hat{j} = \frac{v_0}{2} \hat{j}$ velocidad de m_1 relativa a C.
 $\vec{v}_2 = -v_2 \hat{j} = -\frac{v_0}{2} \hat{j}$ " " m_2 " a C.

Las velocidades absolutas de m_1 y m_2 en $t = t^*$ son entonces:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_C + \vec{v}_1 = \frac{v_0}{2} (\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_C + \vec{v}_2 = \frac{v_0}{2} (\hat{i} - \hat{j})$$

c) Energía cinética del sistema.

Se trata de un sistema conservativo. Como la energía potencial no varía, ya que se mueve en un plano horizontal, entonces su energía cinética se conserva. Por lo tanto $K(t^*) = K(0)$

Luego, $K(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$ o sea, $\boxed{K = \frac{1}{2} m v_0^2} = \text{cte}$

Calculemos la energía cinética K en $t = t^*$ empleando el 2º Teo. de König.

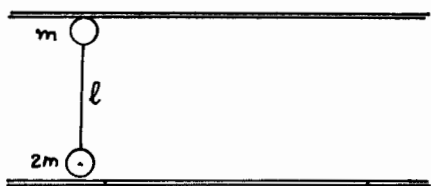
$$K = \frac{1}{2} M V_C^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$

$$= \frac{1}{2} (2m) \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{v_0}{2}\right)^2$$

$$= m \frac{v_0^2}{4} + m \frac{v_0^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2$$

4.

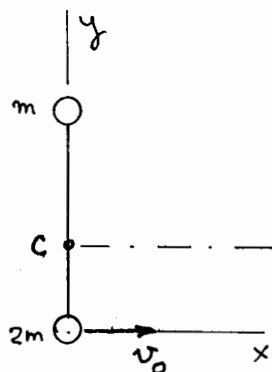


Un sistema formado por dos partículas de masas m y $2m$, unidas por un hilo ideal de longitud l , se encuentra sobre una superficie horizontal lisa entre dos reglas paralelas separadas por una distancia l . Inicialmente el sistema se encuentra en reposo de modo que el hilo está perpendicular a las reglas.

Inicialmente el sistema se encuentra en reposo de modo que el hilo está perpendicular a las reglas.

Si se pone en movimiento la partícula $2m$ con velocidad v_0 , como indica la figura, calcular:

- El tiempo que transcurre hasta que se produce el choque de una de las masas con una de las reglas.
- La tensión T de la cuerda inmediatamente antes del impacto.



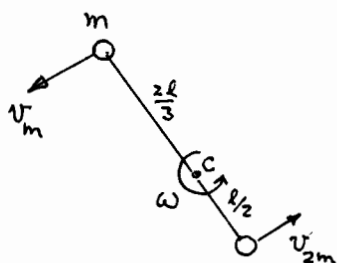
Posición del centro de masa:

$$3m y_c = 2m \cdot 0 + m \cdot l \rightarrow \boxed{y_c = \frac{1}{3} l}$$

Del análisis del problema anterior sabemos que C se mueve en línea recta y con velocidad constante

Si se desea calcular esta velocidad, la calculamos para el instante inicial:

$$3m \cdot V_c = 2m \cdot v_0 + m \cdot 0 \rightarrow \boxed{V_c = \frac{2}{3} v_0}$$



Además, como $M_c = 0 \rightarrow L_c = \text{cte.}$

$$\gamma L_c(0) = L_c(t)$$

El sistema rota en torno a C con velocidad angular ω . Si v_m y v_{2m} son las velocidades lineales de m y $2m$, relativas al centro de masa se tienen las relaciones:

$$v_m = \frac{2}{3} l \omega \quad \gamma \quad v_{2m} = \frac{l}{3} \omega$$

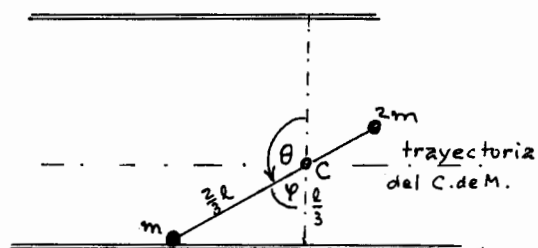
Pongamos entonces: $L_c(0) = 2m v_0 \cdot \frac{l}{3} = \frac{2}{3} m v_0 l \quad (i)$

$$\begin{aligned} \gamma L_c(t) &= m v_m \cdot \frac{2l}{3} + 2m v_{2m} \cdot \frac{l}{3} \\ &= m \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \omega + 2m \left(\frac{l}{3} \right)^2 \omega \\ &= \frac{2}{3} m l^2 \omega \quad (ii) \end{aligned}$$

Iguálalos (i) en (ii): $\frac{2}{3} m l^2 \omega = \frac{2}{3} m v_0 l$

Luego, $\boxed{\omega = \frac{v_0}{l}}$ velocidad angular constante del sistema

- a) Al golpear, la situación es la indicada en la figura; el sistema ha rotado en un ángulo $\theta = \pi - \varphi$

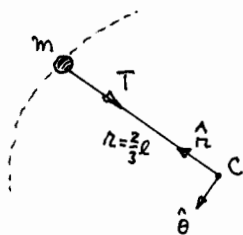


Pero, $\cos \varphi = \frac{l/3}{2l/3} = \frac{1}{2} \therefore \varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

y $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

Como $\omega = \text{cte}$, $\theta = \omega t \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{v_0}{l} t^* \rightarrow \boxed{t^* = \frac{2\pi}{3} \frac{l}{v_0}}$

- b) La partícula m está rotando con ω en torno a C. Entonces, su ecuación de movimiento es

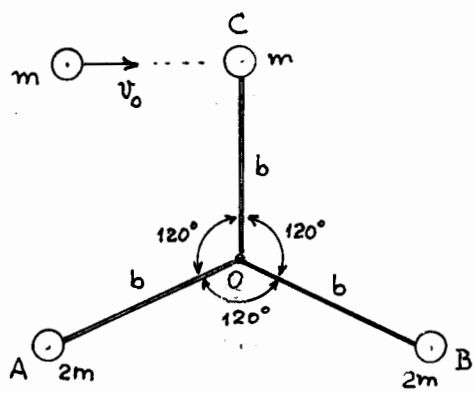


$$-T = -m r \omega^2$$

$$T = m \frac{2l}{3} \frac{v_0^2}{l^2}$$

$$\therefore \boxed{T = \frac{2}{3} m \frac{v_0^2}{l}}$$

5.



Sobre un plano horizontal liso se encuentra en reposo un sistema formado por tres partículas A, B y C, unidas por varillas rígidas de masas despreciables, de modo que sus posiciones coinciden con los vértices de un triángulo equilátero. Una cuarta partícula, de masa m, se aproxima con rapidez v_0

a la partícula C, perpendicularmente a OC, chocando plásticamente con ella.

Calcular la distancia recorrida por el centro de masa

del sistema conjunto desde el instante inmediatamente posterior al choque hasta el instante en que ha rotado en $\frac{2\pi}{3}$.

Consideremos como sistema el compuesto por las cuatro partículas. Antes del choque el centro de masa se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme cuya trayectoria, paralela a AB, pasa por O. La velocidad del centro de masa se calcula de la ecuación:

$$m\vec{v}_0 = 6m \cdot \vec{V}_G \rightarrow \boxed{V_G = \frac{1}{6} v_0} \quad \text{donde } G = \text{centro de masa}$$

ya que las masas en A, B y C no se están moviendo.

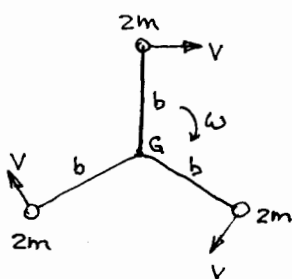
Ahora bien, las fuerzas que se desarrollan en el momento del impacto son fuerzas interiores del sistema de las cuatro partículas. Además, no hay componentes de fuerzas exteriores en el plano del movimiento, de modo que el centro de masa G, ahora coincidente con el centro O del triángulo equilátero continúa sobre la misma trayectoria y con igual rapidez.

Rotación del sistema: $M_G = 0 \rightarrow L_G = \text{cte.}$

Sean $t=0^-$ el instante inmediatamente anterior al choque
y $t=0^+$ " " " posterior al choque.

$$\therefore L_G(t=0^-) = m v_0 \cdot b \quad ; \quad L_G(t=0^+) = 3 \cdot (2m V \cdot b)$$

donde V es la rapidez lineal de las masas 2m en A, B y C, relativas a G.



$$\text{De } L_G(0^-) = L_G(0^+) \rightarrow m v_0 b = 6m V \cdot b$$

$$\text{Pero } V = b\omega$$

$$\text{Luego, } \boxed{\omega = \frac{v_0}{6b}}$$

$$\text{De } \theta = \omega t \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{v_0}{6b} t^* \rightarrow t^* = \frac{4\pi b}{3v_0}$$

Finalmente, la distancia recorrida por G en t^* es

$$d = V_G \cdot t^* \rightarrow \boxed{d = \frac{2}{3} \pi b}$$