

Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

8 de Agosto, 2006

P1. Sean $L, D, U, L', D', U' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices tales que:

- L, L' son triangulares inferiores con unos en la diagonal
- U, U' son triangulares superiores con unos en la diagonal
- D, D' son diagonales invertibles
- $L \cdot D \cdot U = L' \cdot D' \cdot U'$

1. Demuestre que $L = L'$, $D = D'$ y $U = U'$.
2. Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y suponga que $C = L \cdot D \cdot U$. Demuestre que $L = U^T$.
3. Sea $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica. Demuestre que no existen L, D, U cumpliendo las propiedades mencionadas tales que $S = L \cdot D \cdot U$.

P2. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tales que $A^k = 0$. Demuestre que la matriz $(\mathbf{I} - A)$ es invertible ($\mathbf{I} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la identidad), y que su inversa es la matriz $(\mathbf{I} + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$.

P3. Dado $a \in \mathbb{R}$ un parámetro desconocido, considere el sistema lineal

$$\begin{array}{rrcr} ax_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2ax_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema (a) tenga solución única, (b) tenga infinitas soluciones y (c) no tenga solución. En caso de haber soluciones, determínelas.

P4. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matrices.

1. Demuestre que $A = B$ si y sólo si $(\forall x \in \mathbb{R}^n) Ax = Bx$.
2. Suponga que $m = n$ y que ambas matrices son simétricas. Demuestre que $A = B$ si y sólo si $(\forall x \in \mathbb{R}^n) x^T Ax = x^T Bx$