

Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

12 de Septiembre, 2006

P1. Sean V un espacio vectorial, v_0, v_1, \dots, v_n elementos de V y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares. Demuestre que $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{v_0, v_1 + \alpha_1 v_0, \dots, v_n + \alpha_n v_0\}$ es linealmente independiente.

P2. Considere el conjunto de vectores en \mathbb{R}^4

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

y sea W el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por A . Extraiga de A una base de W , y extienda esta base a una base de todo \mathbb{R}^4 .

P3. Sea

$$V = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : (\exists q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})) p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 5)\}$$

1. Pruebe que V es s.e.v. de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Dé una base de V , y calcule su dimensión.
3. Pruebe que $V + \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Razonando con las dimensiones de los espacios involucrados, concluya que la suma es directa.

P4. Sea V un espacio vectorial. En $V \times V$, definimos suma y ponderación por escalar como

$$\begin{aligned}(v_1, w_1) + (v_2, w_2) &= (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \\ \lambda(v, w) &= (\lambda v, \lambda w)\end{aligned}$$

Con estas operaciones, se tiene que (no lo demuestre) $V \times V$ es también un espacio vectorial. Sean α, β escalares fijos, tales que $\alpha \cdot \beta \neq 1$. Considere los subconjuntos de $V \times V$

$$\begin{aligned}A &= \{(v, \alpha v) : v \in V\} \\ B &= \{(\beta w, w) : w \in V\}\end{aligned}$$

Demuestre que ambos son s.e.v. de $V \times V$, y que $A \oplus B = V \times V$.