

Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

26 de Septiembre, 2006

P1. Sea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

y sea W el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por A .

1. Extraiga de A una base de W .
2. Ortonormalice la base obtenida en la parte anterior.
3. Encuentre una base ortornormal de W^\perp .
4. Encuentre una base ortonormal de \mathbb{R}^4 que contenga a la base ortonormal obtenida para W .

P2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible y U un s.e.v. de \mathbb{R}^n de dimensión k , donde $0 < k < n$. Se define

$$W = \{y \in \mathbb{R}^n : (\forall u \in U) \langle Au, Ay \rangle = 0\}$$

1. Probar que W es s.e.v. de \mathbb{R}^n , y que $W \cap U = \{0\}$.
2. Sea $V = \{v \in \mathbb{R}^n : (\exists u \in U) v = Au\}$. Pruebe que V es s.e.v. de \mathbb{R}^n de dimensión k .

3. Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base ortonormal de V . Definiendo $u_i = A^{-1}v_i$ para todo $i = 1, \dots, k$, probar que $\{u_1, \dots, u_k\}$ es una base de U que verifica la propiedad

$$\langle Au_i, Au_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

4. Probar que

$$w \in W \iff (\forall i \in \{1, \dots, k\}) \langle Aw, Au_i \rangle = 0$$

donde $\{u_1, \dots, u_k\}$ es la base de la parte anterior.

5. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$z = \sum_{i=1}^k \langle Av, Au_i \rangle u_i$$

Probar que $z \in U$ y que $v - z \in W$.

6. Deducir que $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, y calcular la dimensión de W .

P3. Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Consideraremos $V \times W$ como un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , definiendo la suma y ponderación por escalar en cada componente. Dada cualquier función $f : V \rightarrow W$, definimos su gráfico como

$$G_f = \{(v, w) \in V \times W : w = f(v)\}$$

Pruebe que f es lineal si y sólo si G_f es s.e.v. de $V \times W$.