

# Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

3 de Octubre, 2006

**P1.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  y sea  $L : V \rightarrow V$  una función lineal. Suponga que existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $x_0 \in V$  tales que  $L^{n-1}(x_0) \neq 0$  y  $L^n(x_0) = 0$  (los exponentes denotan composición). Demuestre que el conjunto  $\{x_0, L(x_0), \dots, L^{n-1}(x_0)\}$  es linealmente independiente.

**P3.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal que cumple

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre una expresión para  $T(x)$  donde  $x$  es cualquier vector de  $\mathbb{R}^3$ . Calcule  $\mathbb{Ker}(T)$  e  $\mathbb{Im}(T)$ .

**P2.** Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$ , y  $T : V \rightarrow V$  una función lineal. Demuestre que

1.  $\mathbb{Ker}(T) \oplus \mathbb{Im}(T) = V \implies$  la restricción de  $T$  a  $\mathbb{Im}(T)$  es un isomorfismo
2.  $\mathbb{Ker}(T) \oplus \mathbb{Im}(T) = V \iff \mathbb{Ker}(T \circ T) = \mathbb{Ker}(T)$

**P4.** Sean  $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones lineales. Demuestre que si

$$\mathbb{Ker}(T) \subseteq \mathbb{Ker}(S)$$

entonces existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $S = \alpha \cdot T$ .