

P1. Sea $(G, *)$ un grupo, y $f : G \rightarrow G$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in G$. Probar que

$$f \text{ es un isomorfismo} \iff G \text{ es un grupo abeliano}$$

P2. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - i)^n + (1 + i)^n \in \mathbb{R}$.

P3. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de él. Se define el conjunto

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

Demuestre que $H * K$ es un subgrupo de G .

P4. Sea $(G, *)$ un grupo tal que para cada $g \in G$ existe $n \geq 1$ tal que

$$g^n = \underbrace{g * g * \dots * g}_{n \text{ veces}} = e$$

donde e es el neutro de G . Pruebe que el único morfismo $F : (G, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante igual a cero.

P5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo finito (*i.e.* $|A| < \infty$) sin divisores de cero.

1. Pruebe que existe $n \geq 1$ tal que $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} = 0$.

2. Pruebe que si $a, b \geq 1$, entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \cdot b \text{ veces}} = 0 \implies \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_a = 0 \vee \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b = 0$$

3. Se llama *característica de A* al menor $n \geq 1$ tal que se cumple la propiedad de la parte 1. Pruebe que la característica de A es un número primo.

4. Muestre que la característica de A divide a $|A|$. HINT: Vea A como un grupo, y use el teorema de Lagrange.

5. Sean $(G, +, \cdot)$ y $(H, *, \Delta)$ dos cuerpos finitos, tales que existe un morfismo $f : G \rightarrow H$ no nulo. Muestre que la característica de H es menor o igual que la de G . HINT: Demuestre primero que $f(1_G) \neq 0_H$.

P6. Los complejos z_1, z_2, \dots, z_k son tales que $|z_i| = 1 \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Demuestre que si $\sum_{i=1}^k z_i = a$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{i=1}^k \frac{1}{z_i} = a$.

P*. Sea $(G, *)$ un grupo, con $|G| = 15$. Suponga que existen H, K subgrupos de G tales que

$$|H| = 3 \quad , \quad |K| = 5$$

y sea e el neutro de G .

Demuestre que $H \cap K = \{e\}$ y que $H * K = G$.