

Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell
Auxs: David Gómez, Francisco Silva

20 de Junio, 2006

P1. Sea $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que

$$|z + i| = |z - i| \iff z \in \mathbb{R}$$

P2. Muestre que el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left| \frac{z - 2}{z + 1} \right| = 2$$

es una circunferencia en el plano complejo. Determine su centro y su radio.

P3. Sea $W = \{z \in \mathbb{C} : \exists n \geq 1, z^n = 1\}$. Muestre que (W, \cdot) es grupo.

P4. Sea (G, \cdot) subgrupo finito de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Demuestre que existe $n \geq 1$ tal que G es el conjunto de raíces n -ésimas de la unidad. HINT: Usando la finitud de G y el teorema de Lagrange concluya que para todo $g \in G$, $g^{|G|} = 1$.

P5. Sea $\varphi : (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ un morfismo. Muestre que existe una raíz n -ésima de la unidad w tal que

$$\varphi(k) = w^k$$

HINT: Utilice la identidad $k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k \text{ veces}}$. Observe que $\varphi(k) \neq 0$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}_n$.

P6. Demuestre que la suma de las raíces n -ésimas de la unidad es 0, y que el producto vale $(-1)^{n-1}$.