

## Pauta P1 y P3 Control 2

FI21A - Mecánica

Prof. Nicolás Mujica

Profs. Auxs. Paulina Cecchi y Kim Hauser

Otoño 2006

### P1.

- (a) Ecuaciones de movimiento en los ejes cartesianos (con  $y$  creciente hacia abajo y  $x$  hacia la derecha):

$$\hat{i})N + F_x = 0 \quad \hat{j})mg - f_r + F_y = m\ddot{y}, \quad \text{donde: } \underbrace{f_r}_{\text{roce}} = -ay \left| \vec{N} \right| \hat{j}; \quad F_{\text{resorte}} := \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

Consideremos el ángulo  $\alpha$  como el que se forma entre el resorte en la posición horizontal y el resorte en cualquier momento.

Viendo que:  $\left| \vec{F} \right| = -k \frac{D}{\cos \alpha} \Rightarrow F_x = -k \frac{D}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha = -kD, \quad F_y = -kD \tan \alpha = -ky,$  obtenemos que  $N = kD$  para todo instante, y además:  $m\ddot{y} = mg - aykD - ky.$

- (b) Por Fuerzas:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= mg - aykD - ky \\ \ddot{y} &= g - \frac{aD+1}{m}ky \\ \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dy} &= g - \frac{aD+1}{m}ky \\ \dot{y}d\dot{y} &= \left( g - \frac{aD+1}{m}ky \right) dy / \int_0^{\dot{y}}, \int_0^y \\ \Rightarrow \frac{\dot{y}^2}{2} &= gy - \frac{aD+1}{m}k \frac{y^2}{2} \\ \dot{y}^2 = 0 &\Rightarrow \mathbf{y_{\max}} = \frac{\mathbf{2mg}}{\mathbf{k(aD+1)}}. \end{aligned}$$

- (b) Por Energía:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{kD^2}{2}, \quad E_f = \frac{k}{2}(D^2 + y_{\max}^2) - mgy_{\max} \\ W_{\text{roce}} &= \int_0^{y_{\max}} -aykD \hat{j} \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_{\max}} -aykD \hat{j} \cdot \hat{j} dy = -\frac{akDy_{\max}^2}{2} \end{aligned}$$

Como el roce es la única fuerza no conservativa que trabaja, decimos que:

$$\begin{aligned} E_f - E_i &= W_{NC} \Leftrightarrow \frac{kD^2}{2} + \frac{ky_{\max}^2}{2} - mgy_{\max} - \frac{kD^2}{2} = -\frac{akDy_{\max}^2}{2} \\ \Rightarrow y_{\max}^2 &= \frac{2mg}{k(aD+1)}y_{\max} \Leftrightarrow \mathbf{y_{\max}} = \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{y_{\max}} = \frac{\mathbf{2mg}}{\mathbf{k(aD+1)}} \end{aligned}$$

, lo que entrega la solución anterior, además de la trivial  $y = 0.$

- (c) Fuerzas que trabajan:  $\vec{F}$  (sólo  $F_y$ , pues  $W_{F_x} = 0$ ),  $f_r$ ,  $m\vec{g}$ . La normal no trabaja porque es  $\perp$  al desplazamiento en todo momento.

•

$$W_N = 0.$$

•

$$W_{f_r} = -\frac{akDy_{max}^2}{2} = -\frac{2aDm^2g^2}{k(aD+1)^2}.$$

•

$$W_{F_y} = \int_0^{y_{max}} -kydy = -\frac{ky_{max}^2}{2} = -\frac{2m^2g^2}{k(aD+1)^2}.$$

•

$$W_{mg} = \int_0^{y_{max}} mgdy = mgy_{max} = \frac{2m^2g^2}{k(aD+1)}.$$

### P3.

(a)  $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + (\ddot{z})\hat{k}$

Ec. Mov:

$$\hat{\phi})f_r\hat{\phi} = mR\ddot{\theta} + 2m\dot{R}\omega_0^2 = 0.$$

$$\hat{\rho}) - N = m\ddot{R} - mR\omega_0^2 = mR\omega_0^2$$

$$\hat{k})f_r - mg = m\ddot{z}$$

Condición para que caiga:  $\ddot{z} < 0$ .

$$\Leftrightarrow f_r < mg.$$

Ahora, como  $f_r \leq \mu_e |\vec{N}|$ , la condición límite queda:

$$\mu_e mR\omega_0^2 < mg$$

$$\Leftrightarrow \mu_e < \frac{g}{R\omega_0^2}.$$

- (b)

$$\hat{k}) \Rightarrow \ddot{z} = g - \mu_d R\omega_0^2$$

$$dz = (g - \mu_d R\omega_0^2)dt / \int_0^{\dot{z}}, \int_0^t$$

$$\Leftrightarrow dz = (g - \mu_d R\omega_0^2)t dt / \int_0^h, \int_0^{t^*}$$

$$h = \frac{g - \mu_d R\omega_0^2}{2} t^{*2} \Leftrightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g - \mu_d R\omega_0^2}}$$

- (c) Es evidente que lo importante aquí es que si el denominador  $g - \mu_d R\omega_0^2 = 0$ , entonces el tiempo será infinito. Pero hay que ver más y observar que la condición de (a) implica directamente que  $\mu_d < \mu_e < \frac{g}{R\omega_0^2}$ , *i.e.*, el denominador no puede ser cero, lo que significa que si el movimiento vertical comenzó en algún instante (que hemos definido como  $t = 0$ ), entonces tardará un tiempo  $t^*$  **finito** en llegar a la base.

♣ /k.h.v.