

FI33A ELECTROMAGNETISMO

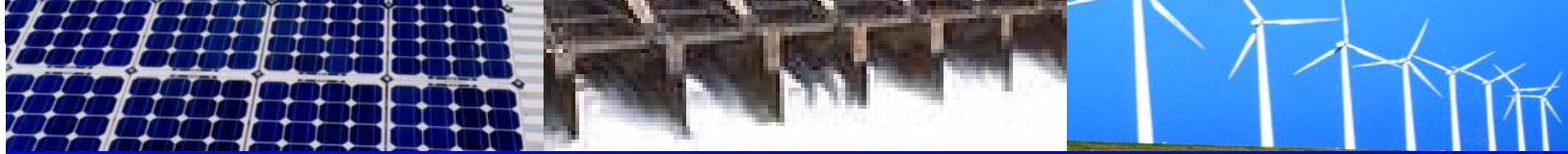
Clase 6

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Clasificación de medios materiales
- Modelamiento de medios materiales
- Materiales no Polares
- Materiales Polares
- Vector Polarización
- Potencial Eléctrico en la Materia
- Cargas de polarización
- Propiedades de cargas de polarización
- Generalización 1a Ecuación de Maxwell

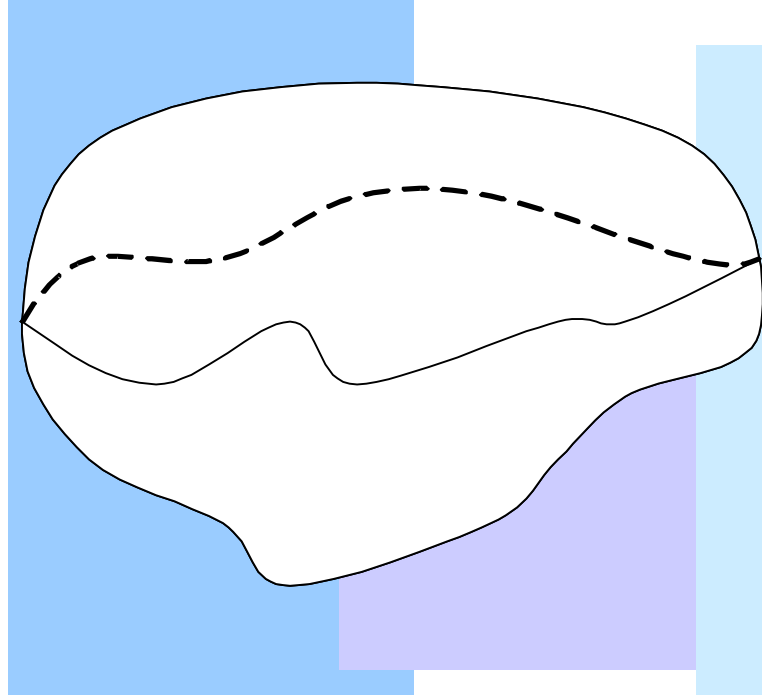


MEDIOS MATERIALES

- **Dieléctricos o aislantes:** las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio
- **Conductores:** las cargas pueden moverse libremente en la superficie o al interior del material
- **Semiconductores:** un material que presenta un comportamiento no lineal en función del campo eléctrico aplicado



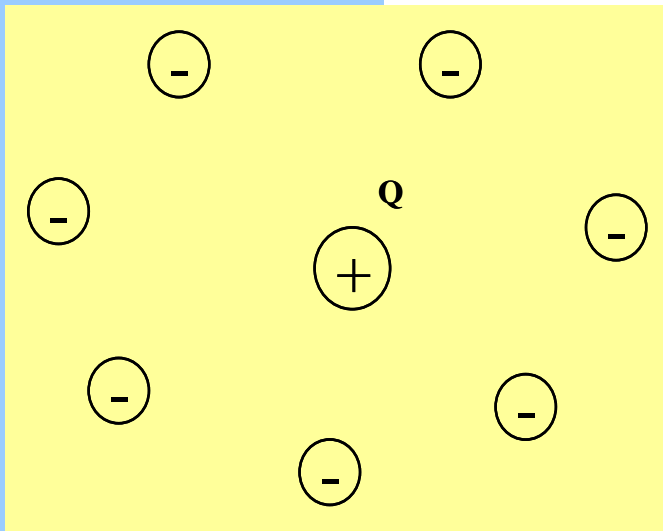
Modelo de los Materiales Dieléctricos



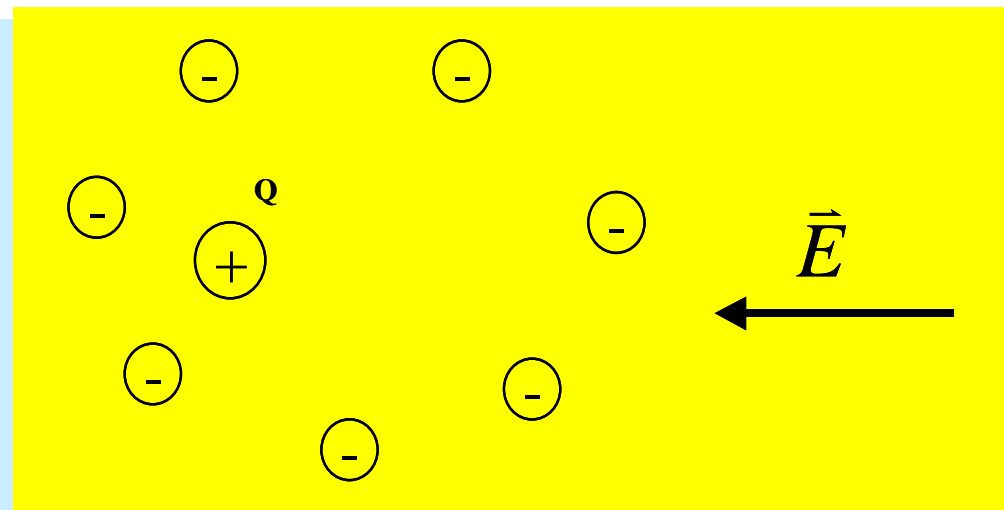
- Cargas (electrones y protones) de los átomos o moléculas mantienen su ligazón
- Cargas no pueden desplazarse libremente
- Sólo pueden producirse pequeñas rotaciones en torno a un punto de equilibrio fijo
- Carga neta nula



Materiales No Polares



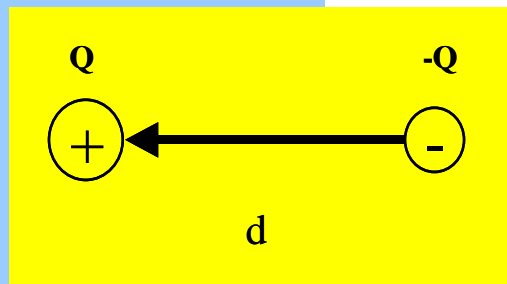
Modelo de átomo
simple



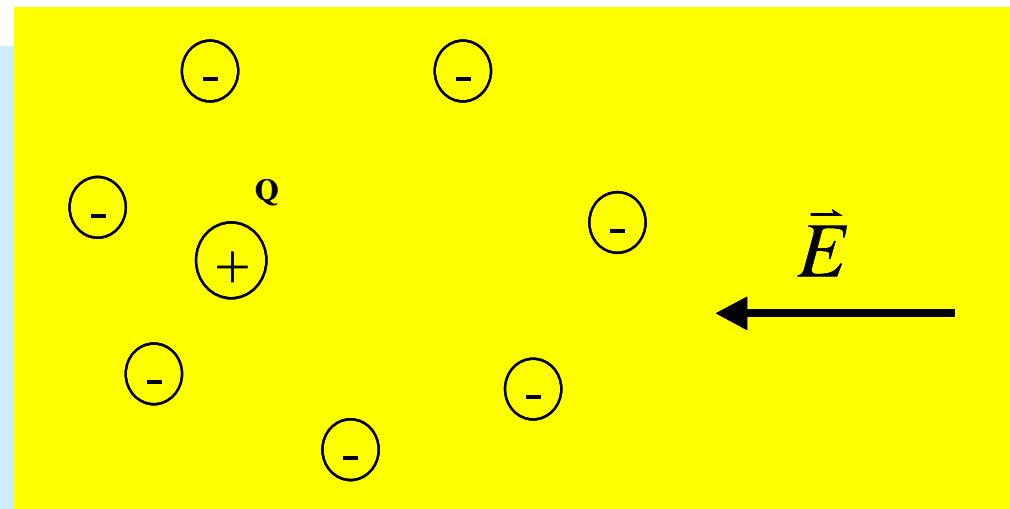
Deformación producida
por campo aplicado



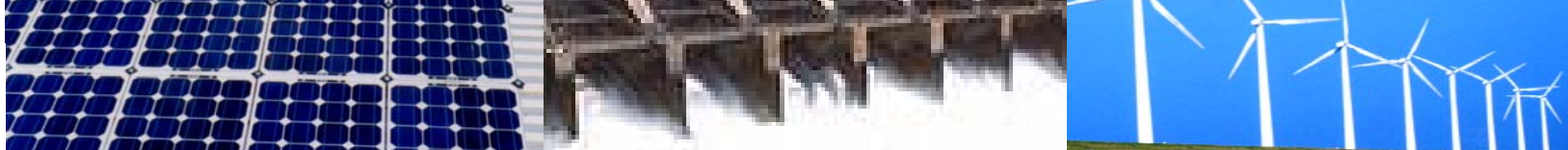
Materiales No Polares



Representación mediante
dipolo

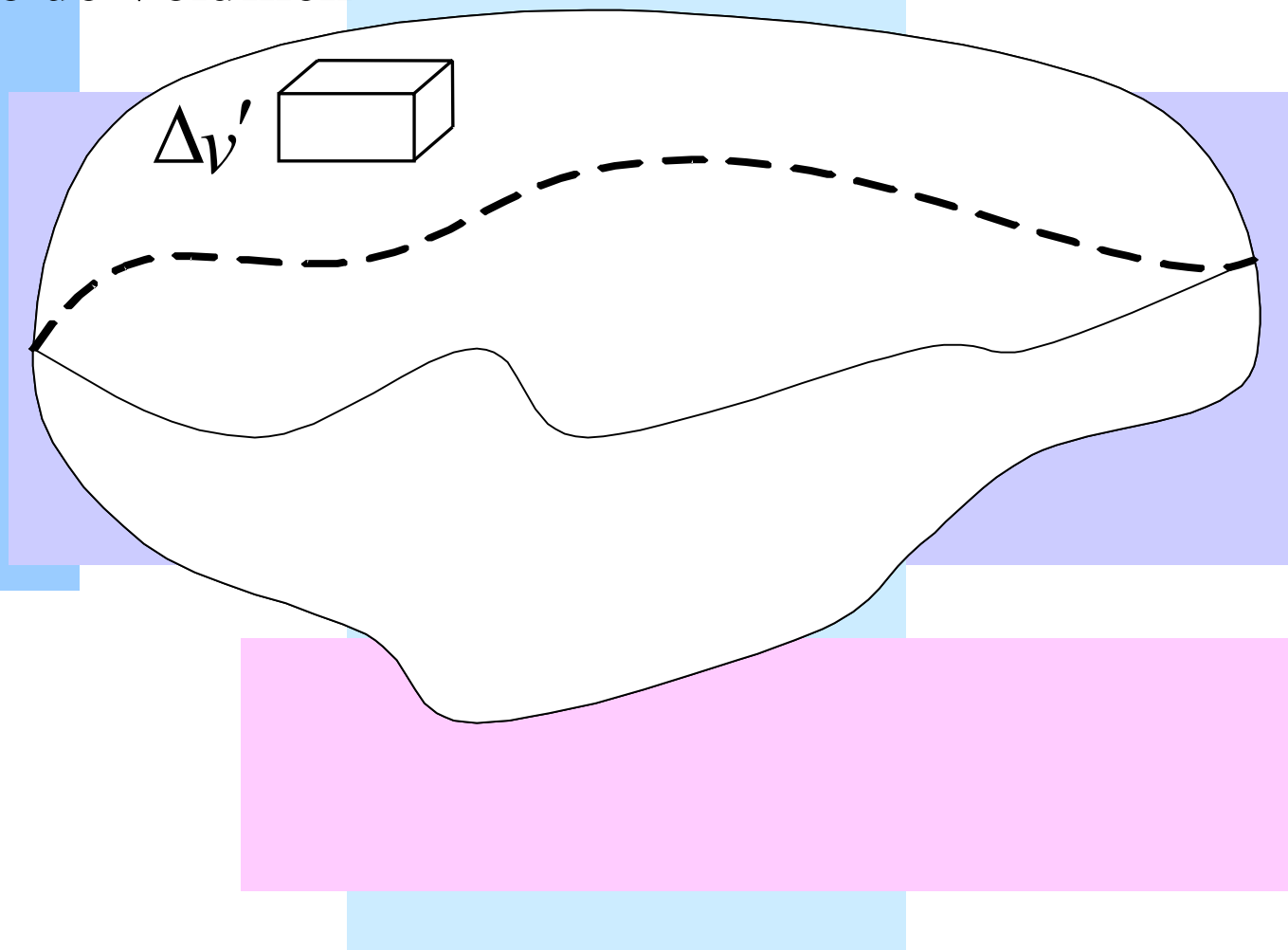


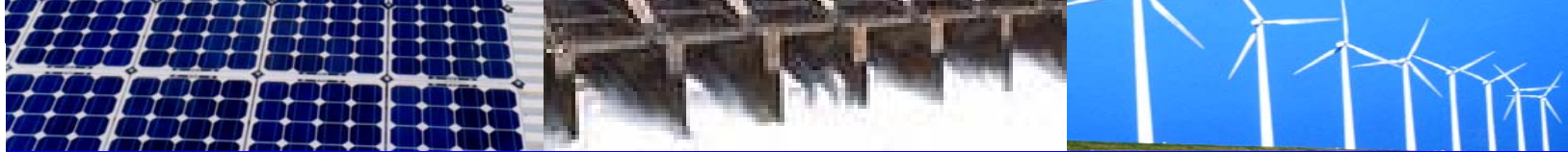
Deformación producida
por campo aplicado



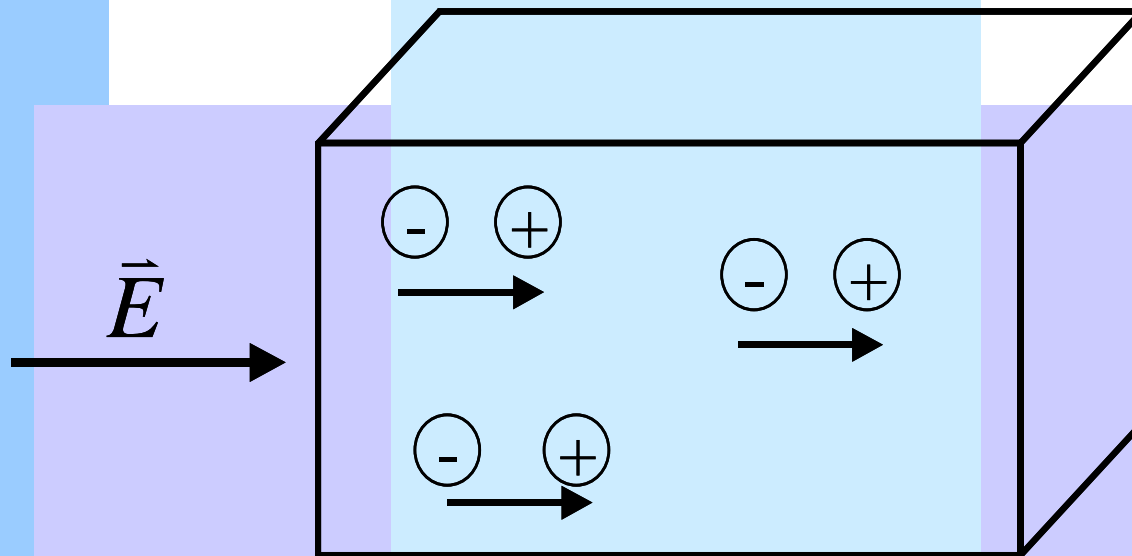
Materiales No Polares

Elemento de Volumen





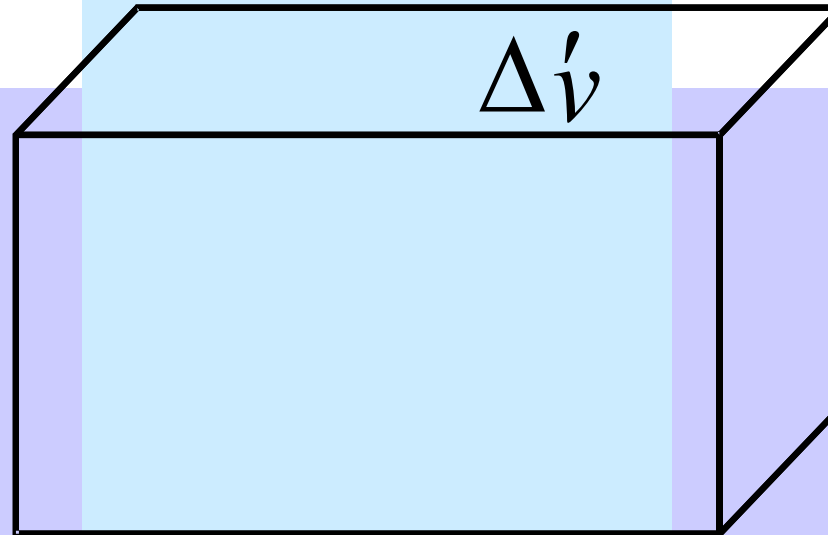
Materiales No Polares





Materiales No Polares

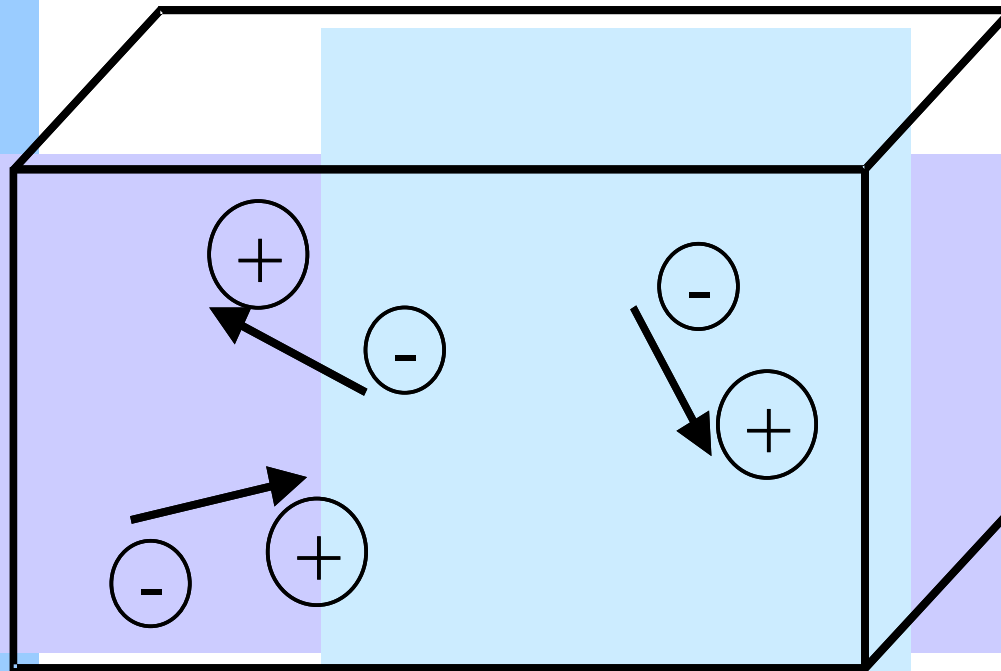
Elemento de Volumen



El material no posee dipolos si no hay campo externo



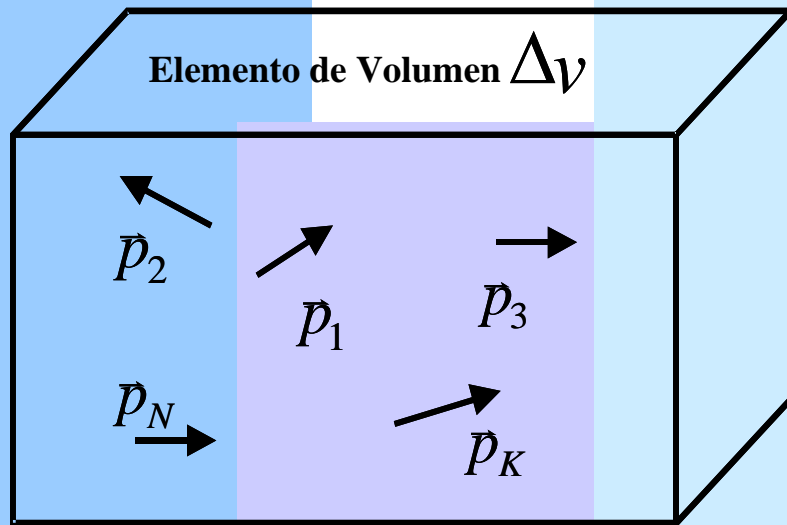
Materiales Polares



- por su estructura molecular poseen dipolos en forma natural
- generalmente orientados en forma aleatoria



Vector Polarización

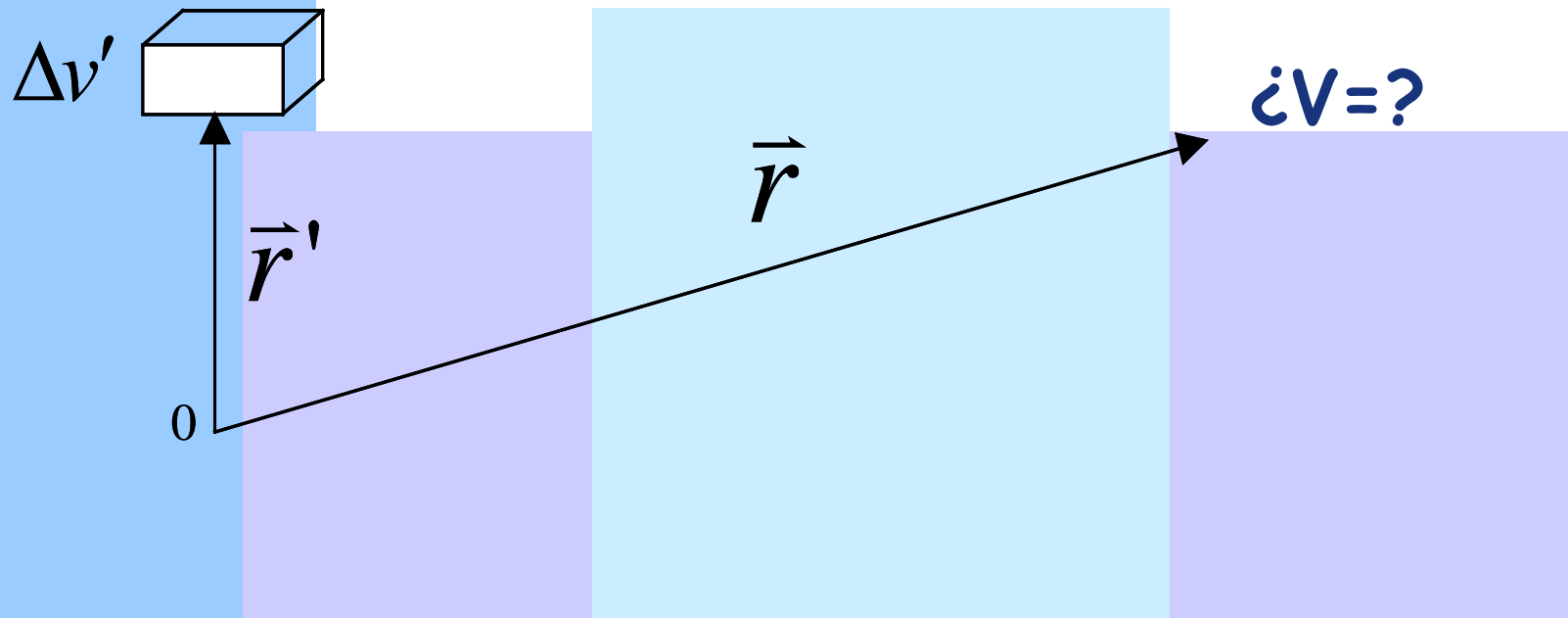


$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^N \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

Dipolos por unidad de volumen
[C/m²]



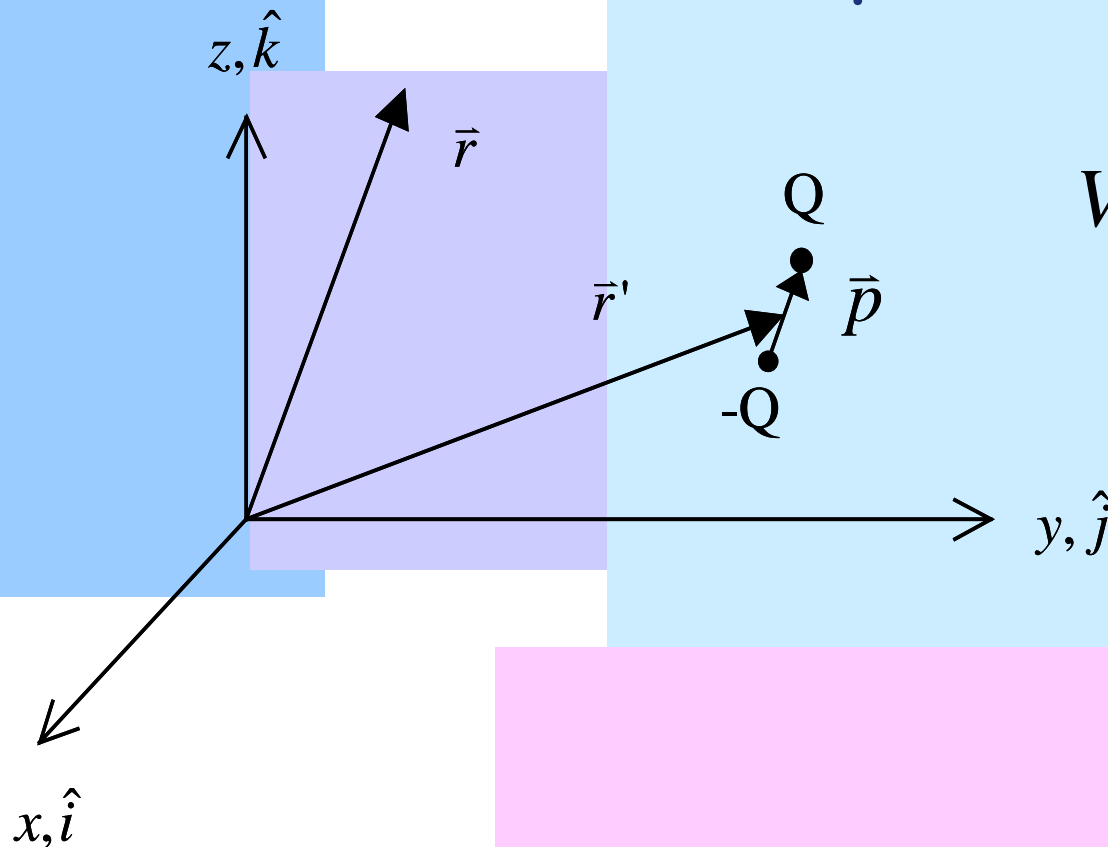
Potencial Eléctrico en la Materia





Potencial Eléctrico en la Materia

Recordemos el potencial de un dipolo



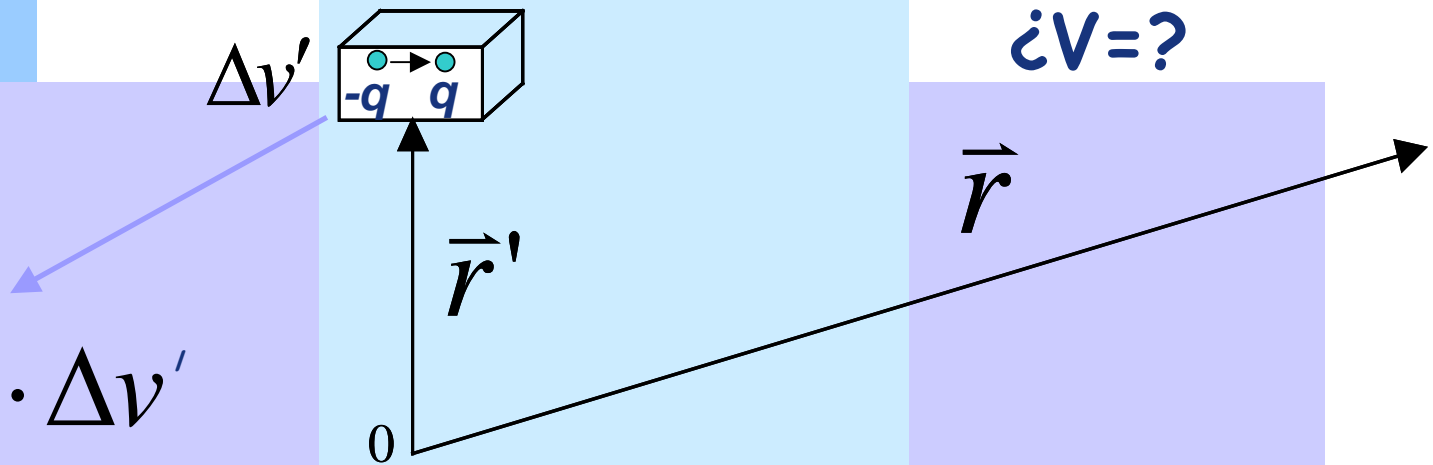
$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

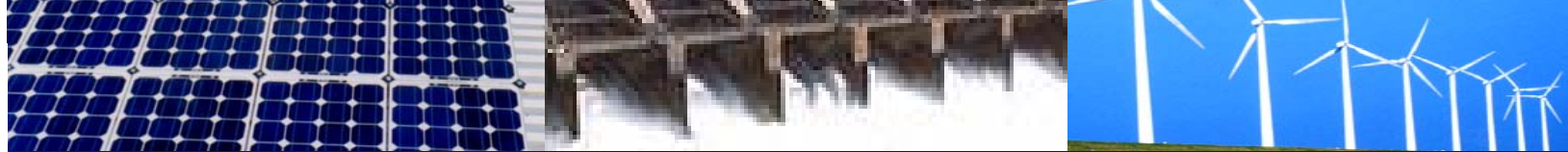


Potencial Eléctrico en la Materia

$$d\vec{p} = \vec{P} \cdot \Delta v'$$

Dipolo equivalente



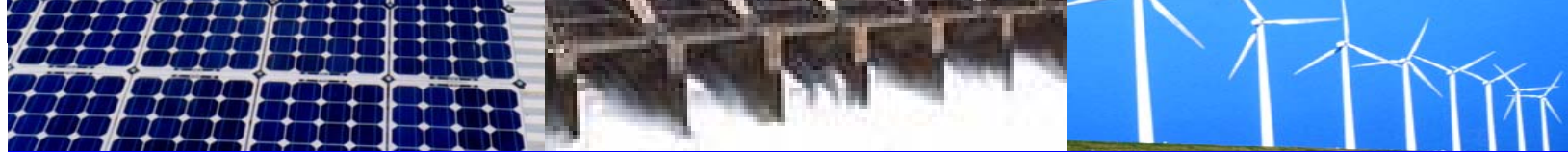


Potencial Eléctrico en la Materia

$$dV = \frac{\overbrace{\vec{P} \Delta v'}^{d\vec{p}} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (2.1)$$

\vec{P} : Vector
polarización

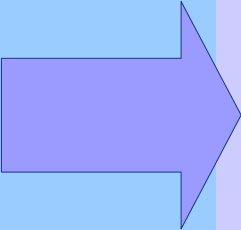
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \quad (2.2)$$



Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad

$$\nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (2.3)$$

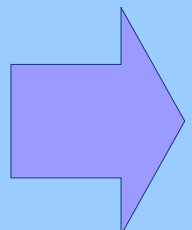

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \vec{P} \bullet \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$



Potencial Eléctrico en la Materia

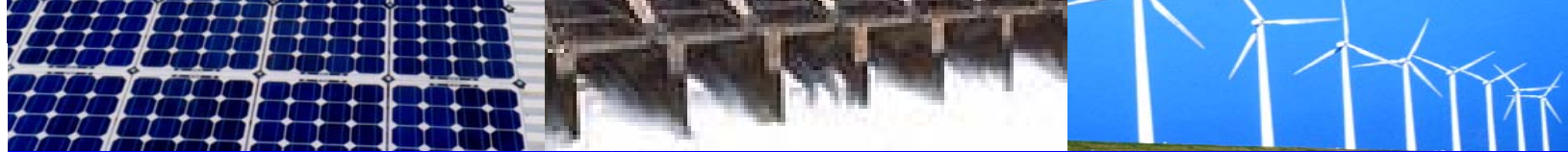
Usando la identidad

$$\nabla \bullet f\vec{A} = f\nabla \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla f$$



$$\nabla' \bullet \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \bullet \vec{P} + \vec{P} \bullet \nabla' \left[\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] \quad (2.5)$$

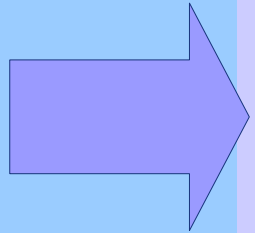
$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \nabla' \bullet \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \bullet \vec{P} \right\} dv' \quad (2.6)$$



Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} dv = \oiint_{S(\Omega)} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$



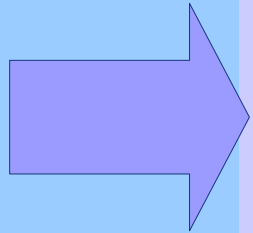
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$



Potencial Eléctrico en la Materia

Escribiendo

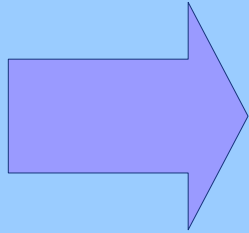
$$\vec{P} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot \hat{n} ds$$



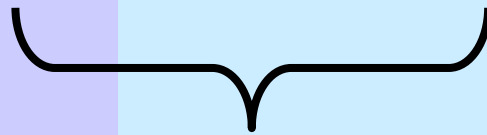
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$



Potencial Eléctrico en la Materia



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

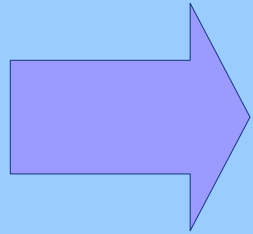


$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

donde $\sigma = \sigma_p = \vec{P} \bullet \hat{n}$



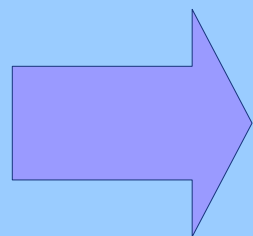
Potencial Eléctrico en la Materia



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'}_{\text{Volume integral term}}$$

También si $\rho = \rho_P = -\nabla' \cdot \vec{P} \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_P(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$

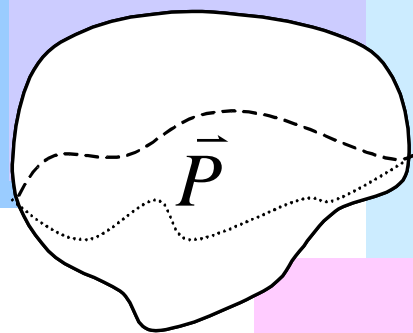
Cargas de polarización



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S(\Omega)} \frac{\sigma_P(\vec{r}') ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho_P(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

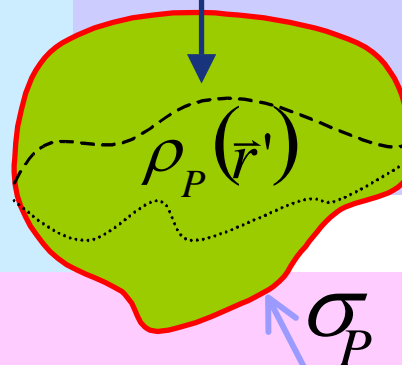
Material dieléctrico

\vec{E}

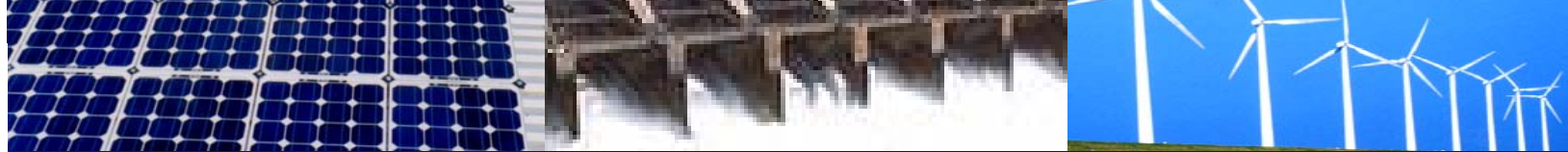


\vec{E}

Carga en volumen



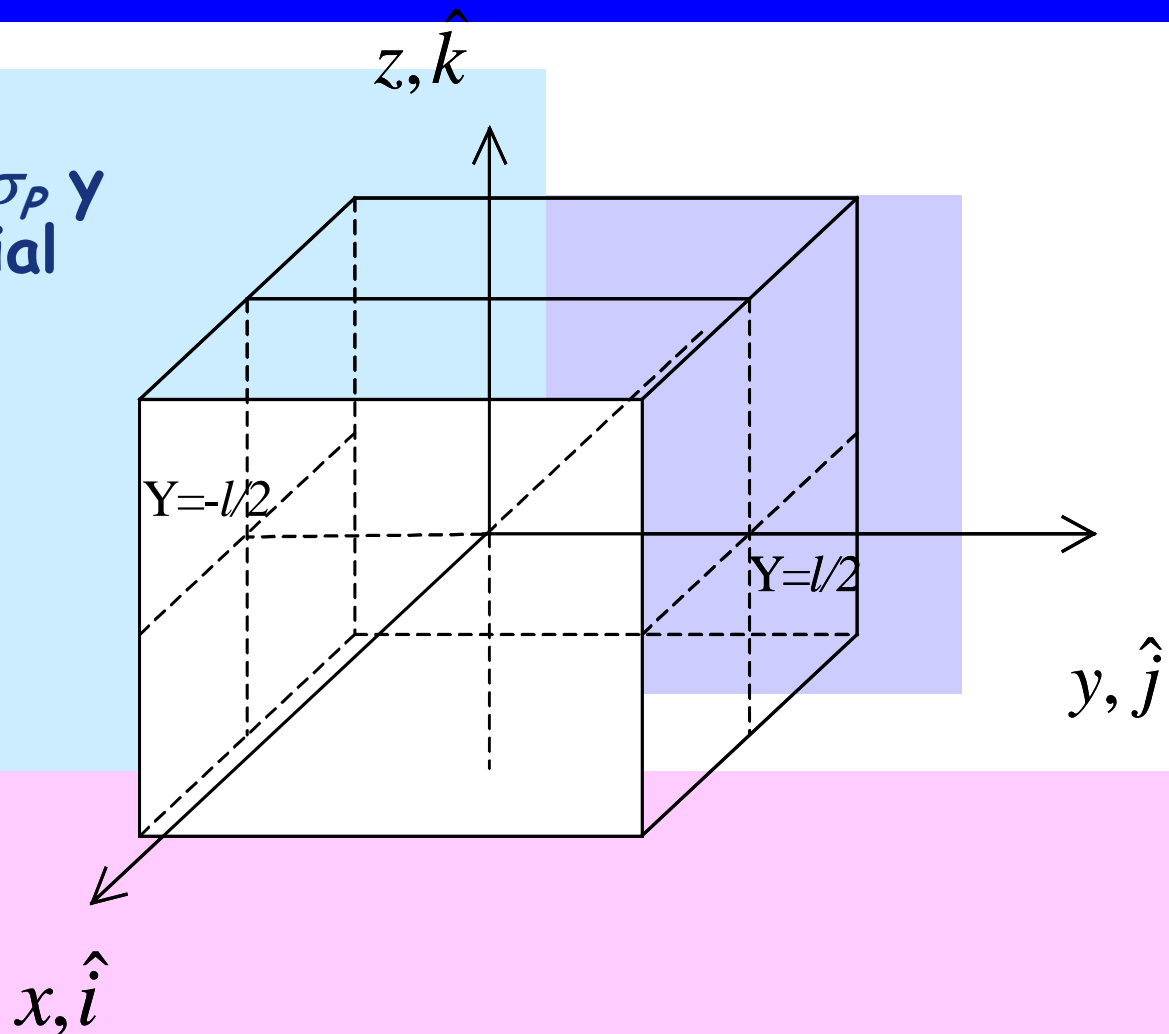
Carga superficial

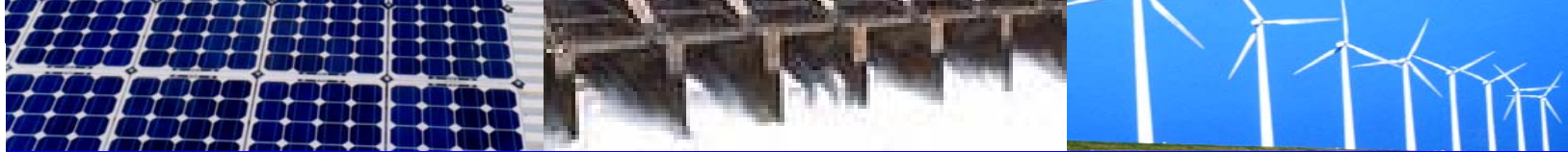


Ejemplo

Calcular densidades de carga de polarización σ_p y ρ_p si el cubo de material posee una polarización dada por el vector

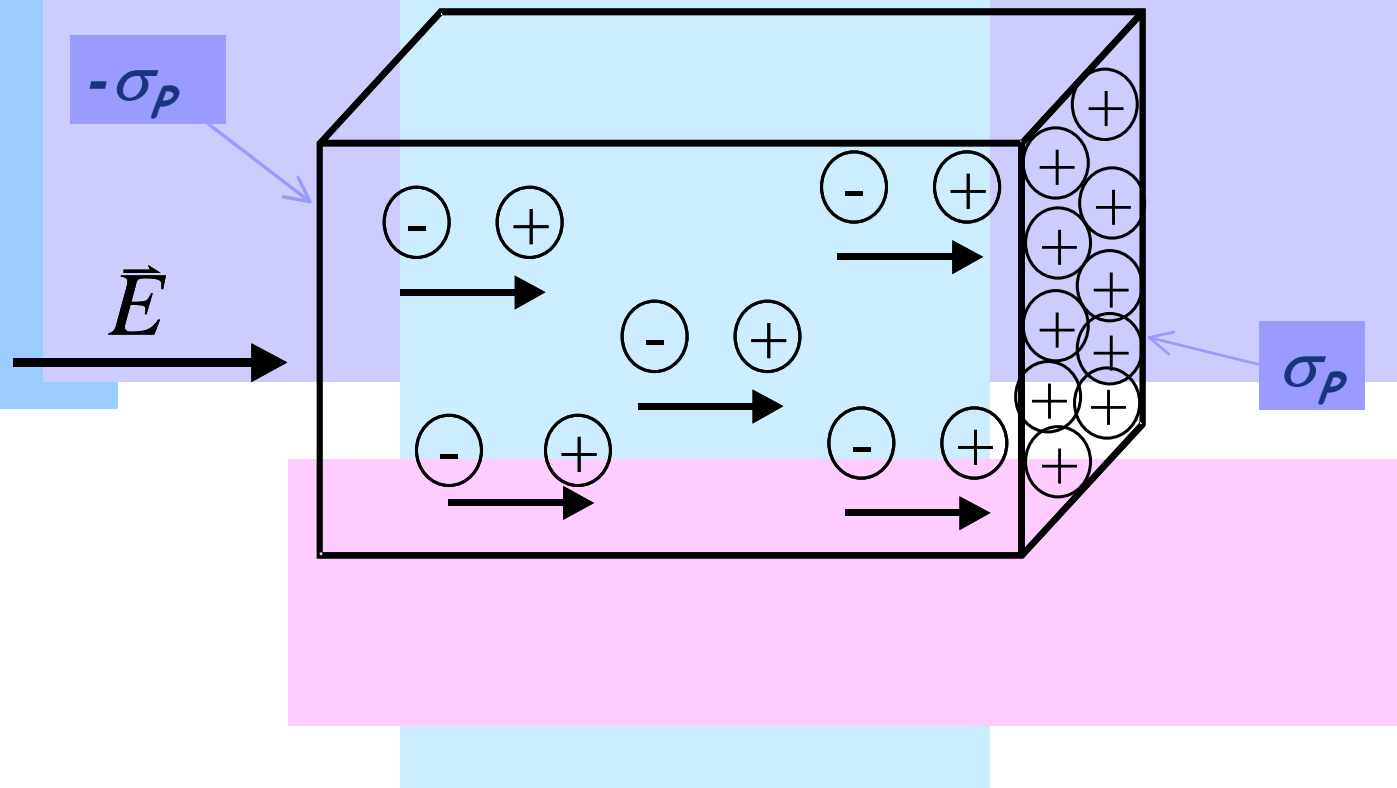
$$\vec{P} = a\vec{r}$$

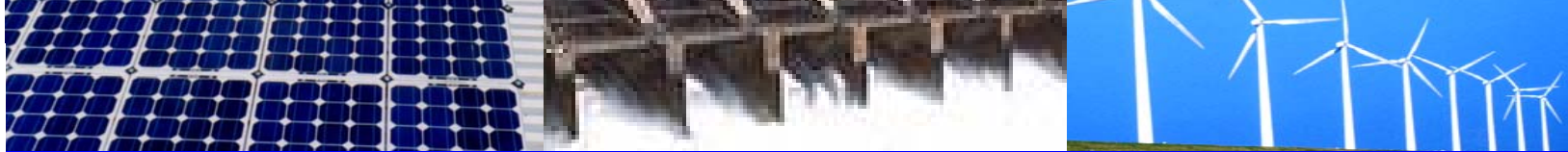




Propiedades de cargas de polarización

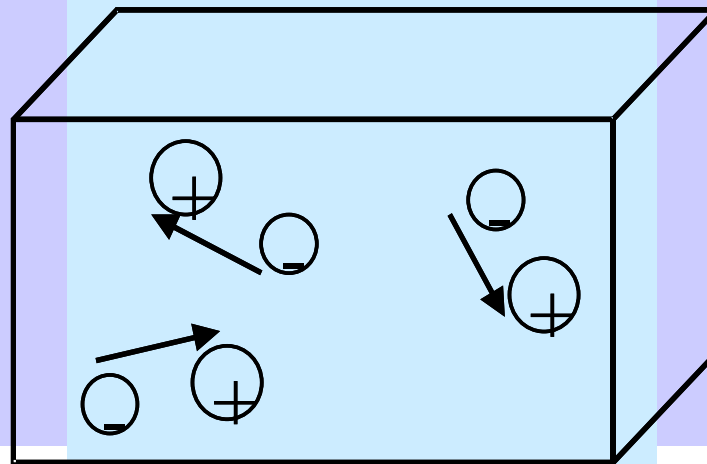
- Cargas de σ_p y ρ_p obedecen a la alineación que ofrecen los dipolos del material dieléctrico y no corresponden a cargas libres al interior de él.

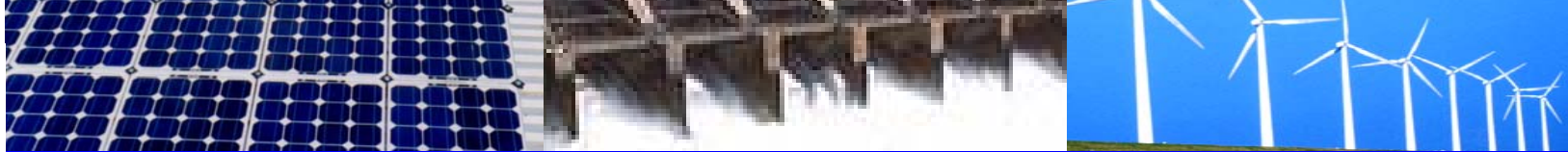




Propiedades de cargas de polarización

- Las cargas de ρ_p y σ_p no se mueven (se obtienen de la rotación de los dipolos).

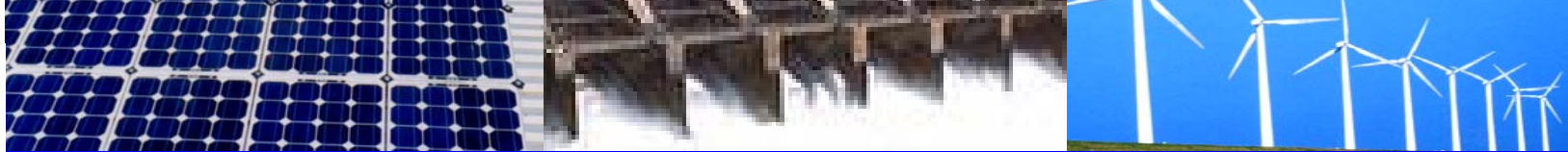




Propiedades de cargas de polarización

- Carga neta de polarización es nula

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \rho_P(\vec{r}') dv' + \oiint_{S(\Omega)} \sigma_P(\vec{r}') ds' &= \iiint_{\Omega} -\nabla' \cdot \vec{P} dv' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s}' \\
 &= - \oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s}' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s}' \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



Generalización 1a Ecuación de Maxwell

Caso general: Hay distribución de cargas libre ρ_L al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización ρ_P

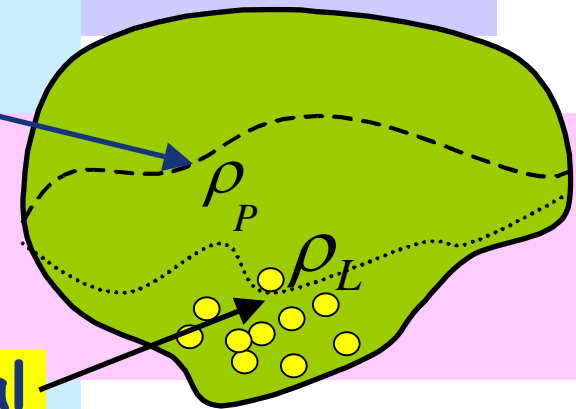
Luego la 1a ecuación de Maxwell queda

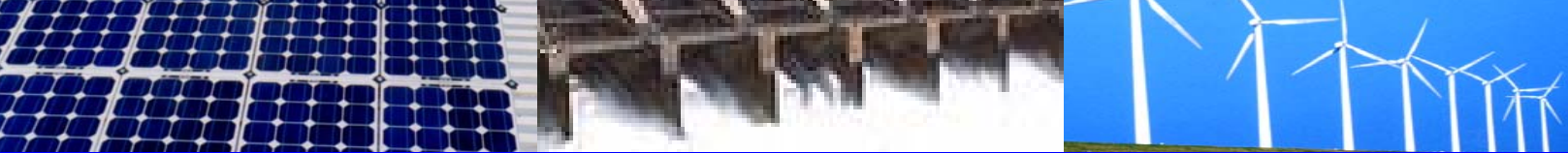
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material

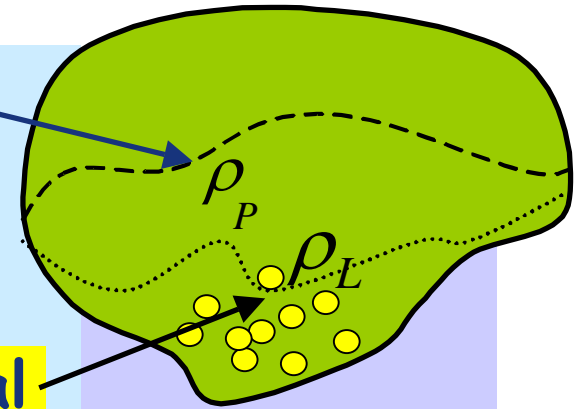




Generalización 1a Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material



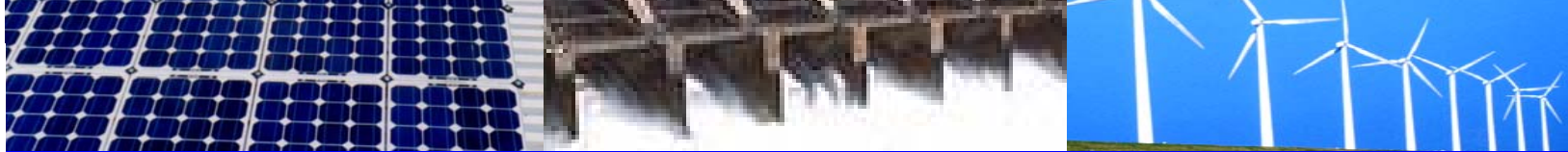
$$\rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} - \rho_P$$

pero $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ \Rightarrow $\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}$ (2.18)

$$\rho_L = \nabla \cdot (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) \quad (2.19)$$

Vector desplazamiento

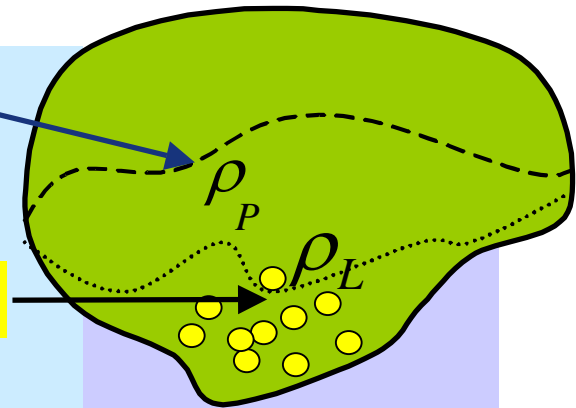
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$



Generalización 1a Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1a Ecuación de Maxwell

integrando

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L dv}_{Q_{TOTAL}} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv}_{\iint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}} \Rightarrow \iint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{TOTAL}$$

Ley de Gauss en
medios materiales