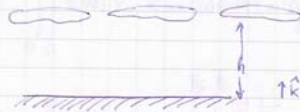


PAUTAS 06/01

Control 1 (P1)



Datos - $E_{\text{sup}} = 3 \times 10^6 \text{ [V/m]}$
 - $V(h) = Ah^2$
 - $\epsilon = 50\epsilon_0$ y $V(h=1) = 5 \text{ [V]}$

a) Calcular h del que se genera un rayo.

$$V(h=1) = A = 5 \Rightarrow A = 5 \text{ [V]} \text{ / pto}$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial h} = -2Ah \hat{k} \text{ / pto}$$

$$\text{si } E = E_{\text{sup}} \Rightarrow 2.5 \text{ [V]} h = 3 \times 10^6 \text{ [Vm]}$$

$$\Rightarrow h = 3 \times 10^5 \text{ [m]} = 300 \text{ [km]} \text{ / pto}$$

b) Calcular la carga acumulada en $\pm 1 \text{ km}^2$

Se modela como placas // de carga Q .

$$\text{Placa } + \text{ / } \pm 1 \text{ km}^2 \quad Q = Q_+ \text{ con } S = 10^3 \times 10^3 = 10^6 \text{ [m}^2] \text{ / pto}$$

$$\text{Placa } - \text{ / } \quad \text{Como } E = \frac{\sigma}{\epsilon} \text{ / pto}$$

$$\Rightarrow Q = QS = \epsilon ES = 50\epsilon_0 \cdot 3 \times 10^6 \cdot 10^6 = 150 \epsilon_0 \times 10^{12} \text{ [C]} \text{ / pto}$$

Otro punto: $\frac{Q}{\epsilon} = CV \text{ / pto}$

$$\text{con } C = \frac{\epsilon S}{h} \text{ / pto}$$

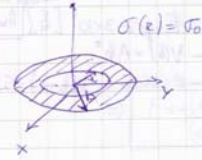
$$\Rightarrow Q = \frac{\epsilon S}{h} V, \text{ como } V = Ah^2$$

$$\Rightarrow Q = \epsilon S A h = 2.50 \epsilon_0 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 300 \cdot 10^3 = 150 \epsilon_0 \times 10^{12} \text{ [C]} \text{ / pto}$$

Control 2 y ejercicios
 Enero 2006

León Vázquez
 Área: Física de la Tierra

Control 2 (P2)



a) Calcular campo en z

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \text{ con } dq = \sigma ds = \sigma r dr d\theta \text{ / pto}$$

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

$$\vec{r}' = r \cos\theta \hat{x} + r \sin\theta \hat{y}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{\sigma r [-r \cos\theta \hat{x} - r \sin\theta \hat{y} + z \hat{k}]}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{\sigma r \hat{k} dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{por } \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0 \text{ / pto}$$

$$= \frac{\sigma z \hat{k}}{2\pi\epsilon_0} \int_0^b \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^b$$

$$= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + 0}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \hat{k} \text{ / pto}$$

b) Calcular el flujo en el primer octante, en un cono de radio $2b$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \text{ por GAUSS} \quad \vec{E} = E(\vec{r}) \text{ (en todo el espacio)}$$

$$d\vec{s} = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r} \text{ con } R = 2b$$

$$Q_T = \sigma_0 S = \sigma_0 \pi (b^2 - a^2) \text{ / pto}$$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

por simetría, se hace el flujo de un casquete completo.

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \iint_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\Omega = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (*)$$

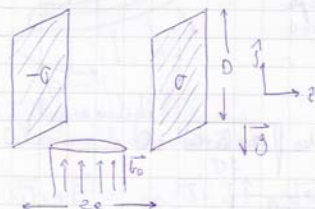
Integrando (para cada elemento, una) / 1 pto.

por simetría: (*) $\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

flujo descendente.

$$\Rightarrow \varphi = \frac{Q_{enc}}{8\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 \pi (b^2 - a^2)}{8\epsilon_0} \quad / 1 \text{ pto.}$$

Problema 1 (P6)



c) Determinar la velocidad de salida de las partículas si pueden salir de ambos lados y todas quedan atrapadas entre las placas.

Seamos que $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}$ / 0.5 pto.

En otro lado, $\vec{F}_e = q\vec{E} = -\frac{q\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}$ y $\vec{F}_g = -mg \hat{j}$ / 0.5 pto.

Las ecuaciones de movimiento:

$$-\frac{q\sigma}{\epsilon_0} = m\ddot{x} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{q\sigma}{\epsilon_0 m} t + A \text{ con } \dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$-mg = m\ddot{y} \Rightarrow \dot{y} = -gt + B \text{ con } \dot{y}(t=0) = v_0 \Rightarrow B = v_0$$

/ 0.5 pto.

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m} t^2 + C \text{ en } t=0, x=x_0 \Rightarrow C=x_0$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t + D \text{ en } t=0, y=0 \Rightarrow D=0$$

$$\therefore x(t) = -\frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m} t^2 + x_0 \text{ con } x_0 \in [0, -x_0]$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t$$

/ 0.5 pto.

Si $x(t_f) = -x_0$:

$$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{-2(-x_0 - x_0)\epsilon_0 m}{q\sigma}}$$

$$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 m (2x_0)}{q\sigma}} \quad / 0.5 \text{ pto.}$$

condición límite $y(t_f) = D$

$$\Rightarrow -\frac{g}{2} \left(\frac{2\epsilon_0 m (2x_0)}{q\sigma} \right) + v_0 \sqrt{\frac{2\epsilon_0 m (2x_0)}{q\sigma}} = D$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{D + \frac{g\epsilon_0 m (2x_0)}{q\sigma}}{\sqrt{\frac{2\epsilon_0 m (2x_0)}{q\sigma}}} \quad / 0.5 \text{ pto.}$$

Nota: Depende de $x_0 \in [0, -x_0]$, si $x_0 = 0 \Rightarrow v_0$ es max.

b) Determinar el trabajo máximo efectuado y qué carga lo hace.

Seamos que $W = -\int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ con $\vec{F} = -\frac{q\sigma}{\epsilon_0} \hat{i} - mg \hat{j}$ y $d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j}$ / 0.5 pto.

$$\Rightarrow W = -\int \left(-\frac{q\sigma}{\epsilon_0} \hat{i} - mg \hat{j} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = -\left[\frac{q\sigma}{\epsilon_0} x + mgy \right] = -\frac{q\sigma}{\epsilon_0} x + mgy$$

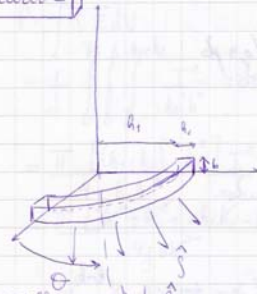
/ 0.5 pto.

Si $x = -ze$ y además $y = 0$

$$\Rightarrow W = W_{max} = \frac{\rho \sigma z e}{\epsilon_0} + mgD \quad / 1 \text{ pto}$$

\therefore las cargas se perderán en $(x, y) = (0, 0)$ y llegarán a $(x, y) = (-ze, 0)$ efectuando el mayor trabajo

Ejercicio 2



Elige una corriente I de atravesando el conductor

$$\begin{aligned} g &= 5,8 \times 10^{-7} \text{ (conductividad)} \\ h_1 &= 1 \text{ m} \\ h_2 &= 9,2 \text{ m} \\ b &= 0,3 \text{ m} \end{aligned}$$

• Si I fluye en sentido \hat{z}

a) Determinar la densidad \vec{J}

$$\vec{J} = g \vec{E} \quad \text{con } \vec{J} = J \hat{s} \text{ y } d\vec{s} = r d\theta dz \hat{s} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \int_0^b J \hat{s} \cdot r d\theta dz \hat{s} = J r \pi b$$

$$\Rightarrow J = \frac{I}{\pi r b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}(r) = \frac{I}{b \pi r} \hat{s}} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

b) Determinar la resistencia entre los casos $l = h_1$ y $l = h_1 + h_2$

$$\vec{E} = \vec{J} = \frac{I}{b \pi r g}$$

$$\Rightarrow V = \int_{h_1}^{h_1+h_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{solo calcula el módulo})$$

$$\Rightarrow V = \frac{I}{b \pi g} \int_{h_1}^{h_1+h_2} \frac{dr}{r} = \frac{I}{b \pi g} \ln \left(\frac{h_1+h_2}{h_1} \right) \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{1}{b \pi g} \ln \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \quad / 0,3 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow R = 6,67 \times 10^{-7} [\Omega] \quad / 0,1 \text{ pto.}$$

c) Calcular las pérdidas de Joule en el conductor.

$$P = \int \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_{h_1}^{h_1+h_2} \frac{I^2}{b^2 \pi^2 r^2} r dr d\theta dz = \frac{1}{g} \frac{I^2}{b^2 \pi^2} \frac{\pi}{r} b \ln r \Big|_{h_1}^{h_1+h_2}$$

$$= \frac{1}{g b \pi} \ln \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) I^2 = R I^2 \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

• Si I fluye en sentido $\hat{\theta}$

d) Determinar \vec{J}

$$\vec{J} = g \vec{E} \quad \text{con } \vec{J} = J \hat{\theta} \text{ y } d\vec{s} = dr dz \hat{\theta} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow I = \int_{h_1}^{h_1+h_2} \int_0^b J \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} = J h_2 b \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{I}{h_2 b} \hat{\theta}} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

e) Determinar la resistencia entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$

$$\vec{E} = \vec{J} = \frac{I}{h_2 b g}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \frac{I}{b h_2 g} \hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{R\pi}{2\epsilon_0 b g} \quad / 0,3 \text{ pto.}$$

$$\text{de } R = \frac{h_1 + h_2}{2} \Rightarrow R = \frac{\pi}{2\epsilon_0 b g} \left(\frac{2h_1 + h_2}{2} \right) = 4,965 \times 10^{-7} [\Omega] / 0,2 \text{ pto.}$$

f) Determinar los potenciales de Joule.

$$P = \int \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

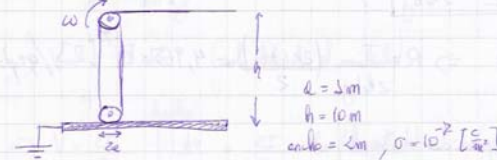
$$= \frac{1}{g} \int_0^{\frac{h_1+h_2}{2}} \int_0^b \int_0^{h_1+h_2} \frac{I^2}{h_2^2 b^2} dz dy dx = \frac{I^2}{g h_2^2 b^2} \left[\frac{R^2}{2} \right]_{h_1}^{h_1+h_2} b$$

$$= \frac{\pi}{4 g b h_2^2} [(h_1 + h_2)^2 - h_1^2] I^2$$

$$= \frac{\pi}{4 g b h_2^2} [h_1^2 + h_2^2 + 2h_1 h_2 - h_1^2] I^2$$

$$= \frac{\pi}{4 g b h_2^2} (2h_1 + h_2) I^2 = R I^2 \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

Condice (P1)



e) Determinar la velocidad para que se acumule 10^{-7} C en 5 s .

$$\text{Solamos que } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\sigma \Delta l \Delta z}{\Delta t} \text{ como } \frac{\Delta z}{\Delta t} = v = \omega r / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \sigma \Delta l \omega R \Delta t \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow 10^{-7} \text{ C} = 10^{-7} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \cdot \left[\text{m} \right] \cdot \omega \cdot \left[\text{m} \right] \cdot 5 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{10^{-7} \cdot 10^7}{10^{-7} \cdot 10} = 0,2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

b) Determinar la diferencia de potencial.

$$\text{Solamos que } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma h}{\epsilon_0} \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\text{en } dH = \frac{Q(H)}{A} \quad (\text{supondremos una cara } A) \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$\text{como } Q(H) = \sigma \Delta l \omega R t = 10^{-7} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \cdot \left[\text{m} \right] \cdot 0,2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \cdot t \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

$$= V(H) = \frac{2 \cdot 10^{-8} t \cdot 10 \text{ m}}{A \epsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-7} t}{A \epsilon_0} [\text{V}] \quad / 0,5 \text{ pto.}$$

Control (P3)



Sea un cilindro infinito con propiedades conductoras y dieléctricas ϵ . En $t=0$ se introduce una cantidad de carga ρ_0 de

a) Determinar la densidad de carga en volumen al interior del cilindro en función del tiempo.

Ecuación de continuidad: $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$ con $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ / 0,5 pts

$$\Rightarrow \sigma \nabla \cdot \vec{E} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Por la 1ª ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ / 0,5 pts.

Nota $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{E} dV = \iiint \frac{\rho}{\epsilon} dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

↑
Teo divergencia ↑
Teo Gauss

$$\Rightarrow \sigma \frac{\rho}{\epsilon} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}} \quad / 1 \text{ pts.}$$

b) Calcular \vec{J} al interior del conductor

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt} \right) V$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\rho_0 \sigma}{\epsilon} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \pi R^2 h \quad / 1 \text{ pts.}$$

Como $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{A}$ / 0,5 pts $\vec{J} = \begin{cases} \text{si } A = \pi R^2 \Rightarrow \vec{J} = -\frac{\rho_0 \sigma}{\epsilon} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \hat{z} \\ \text{si } A = 2\pi R h \Rightarrow \vec{J} = -\frac{\rho_0 \sigma}{2} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \hat{\phi} \end{cases} / 0,5 \text{ pts.}$

c) Repetir e) y b) si $R \rightarrow 0$ y $\rho_0 = 10^{-2} \frac{C}{m^3}$

A forma análoga a e) $\Rightarrow \rho(t) = 10^{-2} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad / 0,5 \text{ pts}$

Obs cheque $\frac{dQ}{dt} \neq \frac{dI}{dt} V$

Calculamos $Q(t)$

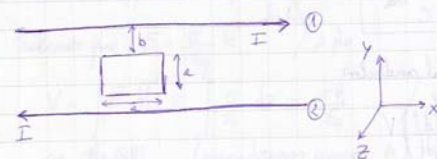
$$Q = \int_V \rho(t) dV = 10^{-2} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \frac{4}{3} \pi R^3 h = 5 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \frac{4}{3} \pi R^3 h$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 5 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \frac{4}{3} \pi R^3 h} \quad / 1 \text{ pts}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma}{\epsilon} 5 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \frac{4}{3} \pi R^3 h$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{\vec{I}}{A} \begin{cases} \text{si } A = \pi R^2 \Rightarrow \vec{J} = -\frac{\sigma}{\epsilon} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \hat{z} \\ \text{si } A = 2\pi R h \Rightarrow \vec{J} = -\frac{\sigma}{2} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \hat{\phi} \end{cases} / 0,5 \text{ pts.}$$

Tarea 3 (P3)



e) Calcular B en el plano, sin considerar el campo magnético de los cables.

b) Calcular la fuerza sobre el circuito.

a) Como elegimos en el plano, se pueden usar coordenadas cartesianas.

Por ley de Ampère $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$ /0,5 pto

$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$ /0,5 pto

Noto además es $\oint B \cdot dl = \mu_0 I \Rightarrow \int B \hat{k} \cdot y d\hat{k} = \mu_0 I$, pero en el plano $\hat{B} = \hat{k}$

Ahora bien para B_1 si $y < 0$, $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y+d)} \hat{k}$

$0 < y < d$, $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-y)} \hat{k}$ /0,5 pto

$y > d$, $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y-d)} \hat{k}$

y para B_2 si $y < 0$, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$

$0 < y < d$, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$ /0,5 pto

$y > d$, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+d} \right) \hat{k} & \text{si } y < 0 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-d} \right) \hat{k} & \text{si } 0 < y < d \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-d} \right) \hat{k} & \text{si } y > d \end{cases} \quad /5 \text{ pto.}$$

Otra forma:

Por integración directa $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$ con: para ① $d\vec{l} = dx \hat{i}$

$\vec{r} = y \hat{j}$

$\vec{r}' = x \hat{i} + d \hat{j}$

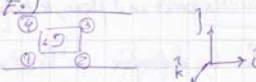
y se llega a $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{y-d} - \frac{1}{y} \right) \hat{k}$ con $y \in (-\infty, \infty)$. para ② $d\vec{l} = -dx \hat{i}$

$\vec{r} = y \hat{j}$

$\vec{r}' = x \hat{i}$

b) $\vec{F} = \int i d\vec{l} \times \vec{B}$ (con corrientes \hat{i})

Tenemos 4 fuerzas (2 por barra)



$\vec{F}_1 = \int_0^d i d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^d i dx \hat{i} \times B(d-b) \hat{k} = i a B(d-b) (-\hat{j})$ /0,75 pto.

$\vec{F}_2 = \int_0^d i d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^d i dy \hat{j} \times B(y) \hat{k} = i e B(y) \hat{i}$

$\vec{F}_3 = \int_0^d i d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^d i dx \hat{i} \times B(d-b) \hat{k} = i e B(d-b) \hat{j}$ /0,75 pto.

$\vec{F}_4 = \int_0^d i d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^d i dy \hat{j} \times B(y) \hat{k} = i e B(y) (-\hat{i})$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i$ pero $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 0$ /0,5 pto.

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$

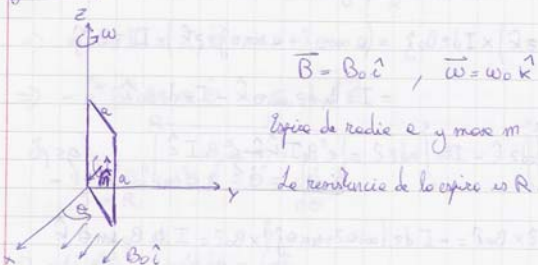
$\Rightarrow \vec{F} = i e (-B(d-b) + B(d-b)) \hat{j}$

$= i e \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{d-b} - \frac{1}{d-b} \right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d-b} \right) \right) \hat{j}$

$= \frac{i e \mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{d-b} + \frac{1}{d-b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{d-b} \right) \hat{j}$

$= \frac{\mu_0 e i I d}{2\pi} \left(\frac{1}{(d-b)(d-b)} - \frac{1}{b(d-b)} \right) \hat{j}$ /0,5 pto.

Ejercicio 4



$$\vec{B} = B_0 \hat{i}, \quad \vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$$

Esfera de radio a y masa m
La resistencia de la esfera es R .

a) Encontrar $\omega(\theta)$ y $\omega(t)$

Para un ángulo θ cualquiera $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_0^{2\pi} B_0 \hat{i} \cdot d\vec{r} d\theta d\phi$ / 0.5 pts

Descomponiendo vectores:

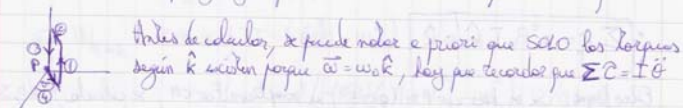
$$\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_0^a \int_0^{2\pi} B_0 \hat{i} \cdot d\vec{r} d\theta d\phi = B_0 a^2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{m}} = \Sigma = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -B_0 a^2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{-B_0 a^2 \cos\theta}{R}} \quad (\text{por ley de Faraday y Ohm}) \quad (\text{el signo es solo el sentido}) / 0.5 \text{ pts.}$$

Calculamos ahora las fuerzas y torques sobre cada lado de la espira: $\vec{F} = \int d\vec{F} \times \vec{B}$



Calculamos los torques desde el punto $P = (x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$d\vec{F}_1 = I d\vec{r} \times \vec{B} = I dz B_0 \hat{j}$$

$$d\vec{T}_1 = (a \hat{r} + z \hat{k}) \times I dz B_0 \hat{j} = (a \cos\theta \hat{i} + a \sin\theta \hat{j} + z \hat{k}) \times I dz B_0 \hat{j}$$

$$= I a B_0 dz \cos\theta \hat{k} - I z dz B_0 \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_1 = I B_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} z dz d\theta = \boxed{I B_0 \frac{a^2}{2} \hat{k}} / 0.5 \text{ pts}$$

$$d\vec{F}_2 = -I dz \hat{i} \times B_0 \hat{i} = -I dz (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \times B_0 \hat{i} = I dz B_0 \sin\theta \hat{k}$$

$$d\vec{T}_2 = (a \hat{r} + z \hat{k}) \times I dz B_0 \sin\theta \hat{k} = -I dz B_0 \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_2 = -I B_0 \sin\theta \int_0^a z dz d\theta = \boxed{-I B_0 \sin\theta \frac{a^2}{2} \hat{\theta}} / 0.5 \text{ pts}$$

$$d\vec{F}_3 = -I dz \hat{k} \times B_0 \hat{i} = -I dz B_0 \hat{j}$$

$$d\vec{T}_3 = z \hat{k} \times -I dz B_0 \hat{j} = I z dz B_0 \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_3 = I B_0 \int_0^a z dz d\theta = \boxed{I B_0 \frac{a^2}{2} \hat{i}} / 0.5 \text{ pts}$$

$$d\vec{F}_4 = I dz \hat{i} \times B_0 \hat{i} = I dz (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \times B_0 \hat{i} = -I dz B_0 \sin\theta \hat{k}$$

$$d\vec{T}_4 = a \hat{r} \times I dz B_0 \sin\theta \hat{k} = I a dz B_0 \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_4 = I B_0 \sin\theta \int_0^a z dz d\theta = \boxed{I B_0 \sin\theta \frac{a^2}{2} \hat{\theta}} / 0.5 \text{ pts.}$$

$$\boxed{\Sigma \vec{T}_i = I B_0 \cos\theta \hat{k}}$$

Otro punto: Si se hace con P en $(0, 0, \frac{a}{2})$ y se aplica Far en \hat{i} , se calcula \vec{T}_1 (0.5 pts)
 $\vec{T}_2 = (0.5 \text{ pts})$ y directamente $\vec{T}_3 = 0$ (bajo cero) / 0.5 pts
 $\vec{T}_4 = -\vec{T}_3$ (fuerzas iguales) / 0.5 pts.

Finalmente, escribiendo $I_P \ddot{\theta} = \sum \tau_P$ con $I_P = \frac{5}{12} m \ell^2$ (momento inercia en y y z).

$$\Rightarrow a^2 B_0 I = I_P \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2 B_0^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}}{R} = \frac{5}{12} m \ell^2 \ddot{\theta}$$

$$-\frac{12 a^2 B_0^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}}{5 m R} = \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow -\frac{12 a^2 B_0^2}{5 m R} \int_0^{\theta} \omega^2 d\theta = \int_{\omega_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}$$

$$-\frac{12 a^2 B_0^2}{5 m R} \int_0^{\theta} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \dot{\theta} - \omega_0 \quad / \text{p.s.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(\theta) = -\frac{12 B_0^2 a^2}{5 m R} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) + \omega_0} \quad / \text{p.s.}$$

En $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\pi) = -\frac{6 B_0^2 a^2}{5 m R} \pi + \omega_0$$

b) Determinar la energía perdida.

$\Delta K = \Delta U + W_{A \rightarrow B}$ como $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = W_{A \rightarrow B}$ ^{potencial gravitacional} /10 p.s.

Por lo tanto $K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ /5 p.s.

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = \Delta K = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}(\pi)^2 - \omega_0^2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{5}{12} m \ell^2 \left(\left[-\frac{6 B_0^2 a^2}{5 m R} \pi + \omega_0 \right]^2 - \omega_0^2 \right) \quad / \text{p.s.}$$

$$= \frac{5}{24} m a^2 \left(\pi^2 + 2\pi \omega_0 \right)$$