

## Pauta Problema 3, Control 2

MA22A, Prof. Pierre Guiraud

Abril 2006

1. Consideramos en lo que sigue  $f(x) = \text{sen}^2(x + y) + x^2y$

i) Calculamos derivadas parciales de 1er orden de  $f$ . Claramente  $f$  es  $\mathcal{C}^1$  por algebra de funciones  $\mathcal{C}^1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\text{sen}(x + y)\cos(x + y) + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\text{sen}(x + y)\cos(x + y) + x^2$$

Las cuales son  $\mathcal{C}^1$  por algebra de funciones  $\mathcal{C}^1$ . Con esto,  $f$  es  $\mathcal{C}^2$ . Calculemos ahora derivadas parciales de 2do orden. Como  $f$  es  $\mathcal{C}^2$ , usamos teo. de Schwarz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(\cos^2(x + y) - \text{sen}^2(x + y)) + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(\cos^2(x + y) - \text{sen}^2(x + y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(\cos^2(x + y) - \text{sen}^2(x + y)) + 2x$$

Entonces, al evaluar en  $(0,0)$  se obtiene:

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como  $f$  es  $\mathcal{C}^2$ , podemos escribir su polinomio de Taylor:

$$T_2^f(h_1, h_2) = (h_1 + h_2)^2$$

ii) Calculamos derivadas de 3er orden. Se tiene que  $f$  es  $\mathcal{C}^3$ , pues las derivadas de 2do orden son  $\mathcal{C}^1$ , por algebra de funciones  $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= -8\cos(x+y)\sen(x+y) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= -8\cos(x+y)\sen(x+y) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= -8\cos(x+y)\sen(x+y) + 2 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= -8\cos(x+y)\sen(x+y)\end{aligned}$$

Por ser  $f$  funcion  $\mathcal{C}^3$  y usando teo. de Schwarz, las derivadas cruzadas son iguales, esto es, por ejemplo:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Ahora, buscamos probar la desigualdad. Por definicion, lo que se pide es acotar el resto.

$$\begin{aligned}h_i &\leq \|h\| \quad i \in \{1, 2\} \\ R_2(0, h) &\leq \frac{\|h\|^3}{3!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial^3 f(t_{ijk}h)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right|\end{aligned}$$

Ademas, podemos usar las siguientes cotas:

$$\begin{aligned}\|\cos(\cdot)\| &\leq 1 \\ \|\sen(\cdot)\| &\leq 1 \\ \|\partial_{xxx} f\| &\leq 8 \\ \|\partial_{yyy} f\| &\leq 8 \\ \|\partial_{xxy} f\| &\leq 10 \\ \|\partial_{yyx} f\| &\leq 8\end{aligned}$$

Entonces

$$R_2(0, h) \leq \frac{\|h\|^3}{3!} (8 + 8 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 8) \leq \frac{70\|h\|^3}{3!} \leq \frac{40\|h\|^3}{3}$$

iii) Sea  $F = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$

Por definicion, la superficie pedida corresponde a  $N_0$  de  $F$ , la curva de nivel asociada al valor 0.

Luego de verificar que el punto  $(0, 1, -1)$  efectivamente pertenece a la superficie, basta notar que tomando  $\nabla F(0, 1, -1)$  se obtendra un vector normal, pues la superficie corresponde a una curva de nivel.

Calculemos entonces  $\nabla F(0, 1, -1)$  :

$$\nabla F(0, 1, -1) \Big|_{(0,1,-1)} = \begin{pmatrix} 3x^2 - yz \\ 3y^2 - xz \\ 3z^2 - xy \end{pmatrix} \Big|_{(0,1,-1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Asi, ya que se tiene el vector normal a la superficie, y no es nulo, calculamos el plano tangente, dado por la ecuacion:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y + 3z = 0$$

Atte.

Ricardo Diaz Riadi

•