





Roberto Cortez Milán.

**P1** Para los siguientes conjuntos determine el interior, adherencia y frontera.

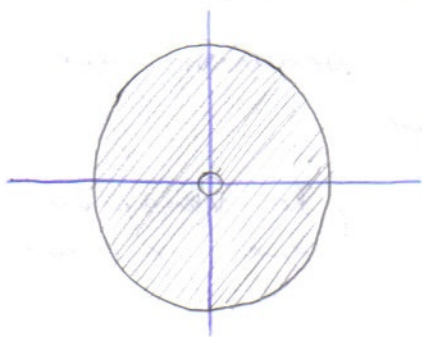
$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2 \leq 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \text{ y } x_1 > 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$$

Solución:

• Hagamos un dibujo de  $A$ :



Afirmamos que

$$\text{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2 < 1\} =: A'$$

$$\text{adh}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\} =: A''$$

En efecto:

PDR:  $A' \subseteq \text{int}(A)$ . Si  $x \in A'$ , entonces  $0 < \|x\|_2 < 1$ . Sea

$$\varepsilon = \min(\|x\|_2, 1 - \|x\|_2) > 0$$

Se tiene que  $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ . En efecto: si  $y \in B(x, \varepsilon)$  entonces:

$$y \in B(x, \varepsilon) \text{ si } \|y - x\|_2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|y\|_2 - \|x\|_2 < \varepsilon$$

$$\text{si } \|y\|_2 < \varepsilon + \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \|y\|_2 < 1 - \|x\|_2 + \|x\|_2 \quad (\text{pues } \varepsilon \leq 1 - \|x\|_2)$$

$$\text{si } \|y\|_2 < 1$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{pues } \|y - x\| \geq \|y\| - \|x\| \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{array} \right)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} y \in B(x, \varepsilon) & \text{ssi } \|x - y\|_2 < \varepsilon \\ & \Rightarrow \|x\|_2 - \|y\|_2 < \varepsilon \\ & \text{ssi } \|x\|_2 - \varepsilon < \|y\|_2 \\ & \Rightarrow \|x\|_2 - \|x\|_2 < \|y\|_2 \quad (\text{pues } -\varepsilon \geq -\|x\|_2) \\ & \text{ssi } 0 < \|y\|_2 \end{aligned}$$

Luego, si  $y \in B(x, \varepsilon)$  entonces  $0 < \|y\|_2 \leq 1$ , es decir,  $y \in A$ . O sea,  $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ , lo cual nos dice que  $x \in \text{int}(A)$ .

P.D.Q:  $\text{int}(A) \subseteq A'$ . Debemos probar que  $x \in \text{int}(A) \Rightarrow x \in A'$ .

Probaremos la contrarrecíproca:  $x \notin A' \Rightarrow x \notin \text{int}(A)$ .

Sea  $x \notin A'$ , es decir,  $\|x\|_2 = 0$  o bien  $\|x\|_2 \geq 1$ .

Si  $\|x\|_2 = 0$  entonces  $x \notin A$ , luego  $x \notin \text{int}(A)$

(pues  $\text{int}(A) \subseteq A$ ). Si  $\|x\|_2 \geq 1$ , veamos que  $x \notin \text{int}(A)$ , es decir, veamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \not\subseteq A \quad \left( \begin{array}{l} \text{la negación de} \\ \text{que } x \in \text{int}(A) \end{array} \right)$$

es decir, veamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in B(x, \varepsilon) \text{ y } y \notin A$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Tomemos  $y = (1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2})x$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|y\|_2 &= \left\| \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2} \right) x \right\|_2 \\ &= \underbrace{\left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2} \right)}_{>1} \underbrace{\|x\|_2}_{\geq 1} > 1 \end{aligned}$$

Luego  $\|y\|_2 > 1$ , es decir,  $y \notin A$ . Además

(2)

$$\begin{aligned}
\|x - y\|_2 &= \|x - (1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2})x\|_2 \\
&= \|x - x - \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}x\|_2 \\
&= \|\frac{-\varepsilon}{2\|x\|_2}x\|_2 \\
&= \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2} \|x\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Luego  $\|x - y\|_2 < \varepsilon$ , es decir,  $y \in B(x, \varepsilon)$ . Con esto, hemos encontrado un  $y \in B(x, \varepsilon) \wedge y \notin A$ , que es lo que queríamos probar.

$$\circ \circ \text{ int}(A) = A' = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2 < 1\}$$

Veamos ahora que  $\text{adh}(A) = A'' = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ .

PDA:  $A'' \subseteq \text{adh}(A)$ . Sea  $x \in A''$ . Debemos probar que  $x \in \text{adh}(A)$ , es decir, debemos probar que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in B(x, \varepsilon) \wedge y \in A$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Separemos en dos casos:

Si  $\|x\|_2 = 0$ , entonces  $x = 0$ . Tomando un vector  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{y} \neq 0$  cualquiera, ponemos  $y = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\|\tilde{y}\|_2} \tilde{y}$ , con  $\tilde{\varepsilon} = \min(1, \varepsilon)$ . Se tiene:

$$\begin{aligned}
\|x - y\|_2 &= \|y\|_2 \\
&= \left\| \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\|\tilde{y}\|_2} \tilde{y} \right\|_2 \\
&= \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\|\tilde{y}\|_2} \|\tilde{y}\|_2 = \tilde{\varepsilon}/2 \leq \varepsilon/2 < \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\circ \circ y \in B(x, \varepsilon)$$

Además

$$\left. \begin{aligned} \|y\|_2 &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 1 \\ \wedge \quad \|y\|_2 &= \varepsilon/2 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &< \|y\|_2 \leq 1 \\ y &\in A \end{aligned}$$

Luego,  $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$ , que es lo que queríamos probar.

Ahora, si  $\|x\|_2 \neq 0$ , tomamos  $y = (1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2})x$ , con  $\tilde{\varepsilon} = \min(1, \varepsilon)$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \|x - y\|_2 &= \|x - x + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}x\|_2 \\ &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \underbrace{\|x\|_2}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \end{aligned}$$

Luego  $y \in B(x, \varepsilon)$ . Además:

$$\|y\|_2 = \|(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2})x\|_2 = \underbrace{(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2})}_{>0} \underbrace{\|x\|_2}_{>0} > 0$$

$$\|y\|_2 = \underbrace{(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2})}_{\leq 1} \underbrace{\|x\|_2}_{\leq 1} \leq 1$$

$$\therefore 0 < \|y\|_2 \leq 1, \text{ i.e., } y \in A$$

Es decir,  $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$ , que es lo que queríamos probar.

PDQ:  $\text{adh}(A) \subseteq A''$ . Debemos probar que  $x \in \text{adh}(A) \Rightarrow x \in A''$ .

Probaremos la contrarrecíproca, es decir,  $x \notin A'' \Rightarrow x \notin \text{adh}(A)$ .

Sea  $x \notin A''$ , i.e.,  $\|x\|_2 > 1$ . Debemos ver que  $x \notin \text{adh}(A)$ , es decir, debemos ver que

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \quad \left( \begin{array}{l} \text{negación de} \\ x \in \text{adh}(A) \end{array} \right)$$



Es decir, debemos probar que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow y \notin A$$

Tomemos  $\varepsilon = \|x\|_2 - 1 > 0$ . Sea  $y \in B(x, \varepsilon)$ . Se tiene que

$$\|y\|_2 = \|x - (x - y)\|_2$$

$$\geq \|x\|_2 - \|x - y\|_2$$

$$> \|x\|_2 - \varepsilon = \|x\|_2 - (\|x\|_2 - 1) = 1$$

$$\therefore \|y\|_2 > 1, \text{ i.e. } y \notin A$$

Por lo tanto,  $\text{adh}(A) = A'' = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ .

Luego, la frontera de  $A$  es

$$\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1 \wedge \neg (0 < \|x\|_2 < 1)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1 \wedge [0 = \|x\|_2 \vee \|x\|_2 \geq 1]\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 0 \quad \vee \quad \|x\|_2 = 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \quad \vee \quad \|x\|_2 = 1\}$$

• B y C, propuestos.

**P2**

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  en un e.v.n.  $E$ , demuestre que:

(i)  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$

(ii)  $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$  (dé un ejemplo donde no hay igualdad)

(iii)  $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$

(iv)  $\text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$  (dé un ejemplo donde no hay igualdad)

### Solución:

(i)  $\subseteq$  Sea  $x \in \text{int}(A \cap B)$ . PDQ:  $x \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ .  
Como  $x \in \text{int}(A \cap B)$ ,  $\exists \varepsilon$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subseteq A \cap B$ .  
Luego,  
$$\left. \begin{array}{l} B(x, \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow x \in \text{int}(A) \\ B(x, \varepsilon) \subseteq B \Rightarrow x \in \text{int}(B) \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$$

$\supseteq$  Sea  $x \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ . PDQ:  $x \in \text{int}(A \cap B)$ .

Como  $x \in \text{int}(A)$ ,  $\exists \varepsilon_1$  tal que  $B(x, \varepsilon_1) \subseteq A$

Como  $x \in \text{int}(B)$ ,  $\exists \varepsilon_2$  tal que  $B(x, \varepsilon_2) \subseteq B$

Tomamos  $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , con lo que se tendrá

$$\left. \begin{array}{l} B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_1) \subseteq A \\ B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_2) \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in \text{int}(A \cap B)$$

(ii) Sea  $x \in \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ . PDQ:  $x \in \text{int}(A \cup B)$ .

Como  $x \in \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ ,  $x \in \text{int}(A)$  o bien  $x \in \text{int}(B)$ .

Si  $x \in \text{int}(A)$ , entonces  $\exists \varepsilon$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subseteq A \subseteq A \cup B$ ,  
luego  $x \in \text{int}(A \cup B)$ . Si, por otro lado,  $x \in \text{int}(B)$ , en  
análogo. Luego,  $x \in \text{int}(A \cup B)$ .

Contraejemplo para la otra inclusión:

$$E = \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$A \cup B = \mathbb{R} \Rightarrow \text{int}(A \cup B) = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{int}(A) = \emptyset \\ \text{int}(B) = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \text{int}(A) \cup \text{int}(B) = \emptyset$$

↖ distintos!

(iii)  $\subseteq$  Sea  $x \in \text{adh}(A \cup B)$ . PDQ:  $x \in \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$ .  
Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $x \in \text{adh}(A \cup B)$ , se tiene que  
 $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ . Luego  $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  o bien



(4)

$B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ . Es decir,  $x \in \text{adh}(A)$  o bien  $x \in \text{adh}(B)$ , lo cual significa que  $x \in \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$ .

2] Sea  $x \in \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$ . P.D.R.:  $x \in \text{adh}(A \cup B)$ .

Como  $x \in \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$ ,  $x \in \text{adh}(A)$  o bien  $x \in \text{adh}(B)$ .

Si  $x \in \text{adh}(A)$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0$   $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , luego (como  $A \subseteq A \cup B$ ) se tendrá que  $\forall \varepsilon > 0$   $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ , con lo cual  $x \in \text{adh}(A \cup B)$ . Por otro lado, si  $x \in \text{adh}(B)$ , el razonamiento es análogo. Luego,  $x \in \text{adh}(A \cup B)$ .

(iv) Sea  $x \in \text{adh}(A \cap B)$ . P.D.R.:  $x \in \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $x \in \text{adh}(A \cap B) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \cap B \neq \emptyset$ .

Como  $A \cap B \subseteq A$ , se tendrá  $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , es decir,  $x \in \text{adh}(A)$ . Análogamente,  $x \in \text{adh}(B)$ . Luego,  $x \in \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$ .

Contra-ejemplo para la otra inclusión:

$$E = \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{adh}(A \cap B) = \emptyset$$

↗ distintos!

$$\begin{array}{l} \text{adh}(A) = \mathbb{R} \\ \text{adh}(B) = \mathbb{R} \end{array} \quad \left\{ \Rightarrow \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B) = \mathbb{R} \right.$$

**P3**

Dados  $E$  e.v.n.,  $A \subseteq E$  y  $x \in E$ , definimos la distancia de  $x$  al conjunto  $A$  como

$$d_A(x) = \inf \{ \|x - y\| : y \in A \}$$

Demuestre que

$$\text{adh}(A) = \{ x \in E : d_A(x) = 0 \}$$

Solución: usaremos la caracterización de la adherencia siguiente:

"  $x \in \text{adh}(A)$  ssi  $x$  es límite de una sucesión de puntos en  $A$ ."

Sea  $A' = \{x \in E : d_A(x) = 0\}$ . Veamos por doble inclusión que  $A' = \text{adh}(A)$ .

$\subseteq$  Sea  $x \in A'$ , i.e.,  $\inf \{ \|x - y\| : y \in A \} = 0$ . Luego,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in A$  tal que  $\|x - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ . Esto quiere decir que  $y_n \rightarrow x$ , luego  $x$  es límite de puntos de  $A$ , luego  $x \in \text{adh}(A)$ .

$\supseteq$  Sea  $x \in \text{adh}(A)$ . Luego,  $\exists (y_n)$  sucesión de puntos de  $A$  tal que  $y_n \rightarrow x$ . Veamos que  $d_A(x) = 0$ , para lo cual bastará ver que  $d_A(x) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$ . Así, sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $y_n \rightarrow x$ , se tiene que existe  $n_0$  tal que  $\|y_{n_0} - x\| < \varepsilon$ . Y como  $y_{n_0} \in A$  se tendrá que

$$\begin{aligned} d_A(x) &= \inf \{ \|x - y\| : y \in A \} \\ &\leq \|x - y_{n_0}\| < \varepsilon \end{aligned}$$

luego,  $d_A(x) = 0$ , en decir,  $x \in A'$   $\square$

**P4**

Sea

$$\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

el espacio vectorial de las funciones continuas de  $[-1, 1]$  a valores en  $\mathbb{R}$  dotado de la norma

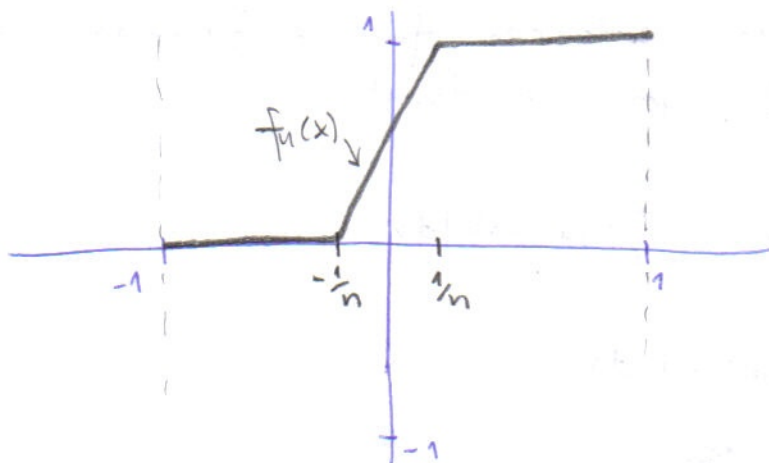
$$\|f\| = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

Considere la sucesión de funciones  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}(1+nx) & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Demuestre que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ , pero que no converge.

Solución: hagamos un dibujo



Veamos que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy:  
Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Sup:  $n \leq m$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_{-1}^{-1/n} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &\quad + \int_{1/n}^{1/m} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{1/m}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &\quad + \int_{1/n}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned}$$

Calculamos las cinco integrales.

- Si  $x \leq -\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{m} \Rightarrow f_n(x) = f_m(x) = 0$ , por lo tanto  $I_1 = 0$ .

- Si  $-\frac{1}{n} < x \leq -\frac{1}{m}$  entonces  $f_n(x) = \frac{1}{2}(1+nx)$  y  $f_m(x) = 0$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} \frac{1}{2}(1+nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} dx + \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right] + \frac{n}{2} \left[ \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2n^2} \right] \\ &= \frac{n}{4m^2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

- Si  $-\frac{1}{m} < x < \frac{1}{m}$  entonces  $f_n(x) = \frac{1}{2}(1+nx)$  y  $f_m(x) = \frac{1}{2}(1+mx)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \left| \frac{1}{2}(1+nx) - \frac{1}{2}(1+mx) \right| dx \\ &= \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \left| \frac{1}{2} \cdot (n-m)x \right| dx \\ &= \frac{1}{2} (m-n) \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |x| dx \\ &= \frac{1}{2} (m-n) \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{m}} x dx \\ &= (m-n) \frac{1}{2m^2} = -\frac{n}{2m^2} + \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

- Si  $\frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{n}$  entonces  $f_n(x) = \frac{1}{2}(1+nx)$  y  $f_m(x) = 1$ , luego

$$I_4 = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left| \frac{1}{2}(1+nx) - 1 \right| dx = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left| \frac{1}{2}(nx - 1) \right| dx$$



(6)

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nx) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} dx - \frac{1}{2} n \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} x dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) - \frac{n}{2} \left( \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2m^2} \right)$$

$$= \frac{1}{4n} + \frac{n}{4m^2} - \frac{1}{2m} = I_2$$

• Si  $\frac{1}{n} \leq x$  entonces  $f_n(x) = f_m(x) = 1$ , luego  $I_5 = 0$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= 0 + \left( \frac{n}{4m^2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2m} \right) + \left( \frac{-n}{2m^2} + \frac{1}{2m} \right) \\ &\quad + \left( \frac{n}{4m^2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2m} \right) + 0 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \end{aligned}$$

Ahora, si el caso fuera  $n \geq m$ , se prueba análogamente que

$$\|f_n - f_m\| = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$$

En cualquier caso, se tiene la igualdad

$$\|f_n - f_m\| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$$

El lado derecho puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando  $n$  y  $m$  suficientemente grandes, lo que prueba que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.



Veamos que  $(f_n)$  no converge. Razonemos por contradicción: si  $f_n \rightarrow f$ , entonces veremos que  $f$  no es continua, lo que sería una contradicción.

Veamos que  $f(x) = 0 \quad \forall x < 0$ : si no fuera así, por continuidad de  $f$  en  $x$  deberá tenerse que  $|f(y)| > 0 \quad \forall y$  en una vecindad de  $x$ , digamos  $]x-\delta, x+\delta[$  y se tendrá que

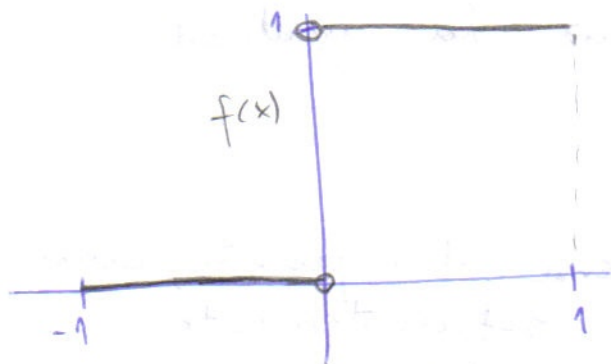
$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y)| dy = K = \text{cte} > 0$$

Sin embargo, para  $n$  suficientemente grande se tendrá que  $x+\delta \leq -\frac{1}{n}$ , con lo cual

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \int_{-1}^1 |f_n(y) - f(y)| dy \\ &\geq \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f_n(y) - f(y)| dy = \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y)| dy = K \end{aligned}$$

con lo que contradice el hecho que  $f_n \rightarrow f$ . Por lo tanto,  $f(x) = 0 \quad \forall x < 0$ .

Análogamente se prueba que  $f(x) = 1 \quad \forall x > 0$ . Obtenemos así una función como la del dibujo:



esta función no puede ser continua en  $0$ , lo cual es una contradicción.

h