

Roberto Amaro Cortez Milán.

P1

Verifique que el punto $x_0 = (1, 1, 1)$ es crítico para la función

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

y determine la naturaleza de x_0 , es decir, vea si x_0 es máximo local, mínimo local, o punto silla.

Solución: ver que x_0 es punto crítico de f significa verificar que $\nabla f(x_0) = \vec{0}$. Veámoslo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4x^3 - 4yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4y^3 - 4xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4z^3 - 4xy$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para analizar la naturaleza de x_0 , analizamos $H(x_0)$, la matriz Hessiana de f en x_0 :

- Si $H(x_0)$ es definida positiva (i.e., todos sus valores propios estrictamente positivos) entonces x_0 es mínimo local.
- Si $H(x_0)$ es definida negativa (i.e., todos sus v.p. estrictamente negativos) entonces x_0 es máximo local.
- Si $H(x_0)$ posee un v.p. estrictamente positivo y otro estrictamente negativo, entonces x_0 es un punto silla (i.e., no es mínimo ni máximo local).
- En cualquier otro caso (es decir $\lambda \geq 0 \ \forall \lambda$ v.p. con al menos uno de ellos igual a cero; o lo mismo con \leq) no se puede asegurar nada.

$$H(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}) = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{x}) = 12z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}) = -4z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{x}) = -4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\vec{x}) = -4x$$

$$\Rightarrow H(x_0) = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{bmatrix} = 4 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_A$$

Para ver si $H(x_0)$ es definida positiva o negativa o ninguna, calculamos sus valores propios. Trabajamos con A , que es más sencilla:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] + 1 \cdot [-(3-\lambda) - 1] - 1 \cdot [1 + (3-\lambda)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)^3 - (3-\lambda) - (3-\lambda) - 1 - 1 - (3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)^3 - 3(3-\lambda) - 2 = 0$$

Hacemos cambio de variable $\alpha = 3-\lambda$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0$$

$\alpha_1 = 2$ es una raíz del polinomio anterior.
Dividamos dicho polinomio por $\alpha - \alpha_1$

$$\begin{array}{r} \alpha^3 - 3\alpha - 2 : \alpha - 2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 \\ - (\alpha^3 - 2\alpha^2) \\ \hline 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 \\ - (2\alpha^2 - 4\alpha) \\ \hline \alpha - 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha - 2) \cdot (\alpha^2 + 2\alpha + 1) = (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2$$

(también podían haberse encontrado las raíces a ojo, no era muy difícil de verlas).

$$\Rightarrow \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4$$

luego, A es def-positiva, luego $H(x_0)$ también lo es. luego, x_0 es un máximo local. \square

P2 Encuentre el máximo de

$$f(x, y, z) = \log(x) + \log(y) + 3 \log(z)$$

en la porción de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Solución: trabajamos con el lagrangeano

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

donde g es la función que al igualarla a cero se obtiene la restricción, es decir,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2$$

Por teorema, un máximo (también un mínimo) local de f sobre la restricción debe cumplir $\nabla L = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \lambda 2x = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{y} - \lambda 2y = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3}{z} - \lambda 2z = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow -g(x, y, z) = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Resolviendo el sistema dado por (1), (2), (3) y (4), encontraremos todos los candidatos a óptimo.

$$\left. \begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow 2\lambda x^2 - 1 = 0 & \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{2\lambda} \\ (2) & \Leftrightarrow 2\lambda y^2 - 1 = 0 & \Leftrightarrow y^2 &= \frac{1}{2\lambda} \\ (3) & \Leftrightarrow 2\lambda z^2 - 3 = 0 & \Leftrightarrow z^2 &= \frac{3}{2\lambda} \\ (4) & \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= 5r^2 \end{aligned} \right\} (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Reemplazando } (*) \text{ en } (4) & \Rightarrow \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{2\lambda} = 5r^2 \\ & \Leftrightarrow \frac{5}{2\lambda} = 5r^2 \\ & \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2r^2} \end{aligned}$$

Reemplazando esto en (*) y recordando que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, obtenemos

$$\bar{x} = r \quad \bar{y} = r \quad , \quad \bar{z} = \sqrt{3}r \quad , \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2r^2}$$

Para ver si este punto es máximo local, analizamos el Hessiano de L (sólo c/r a (x, y, z) , no c/r a λ).

(3)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, z, \lambda) = -\frac{1}{x^2} - 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, z, \lambda) = -\frac{1}{y^2} - 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, y, z, \lambda) = -\frac{3}{z^2} - 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, z, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x, y, z, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x, y, z, \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow H_x L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2}{2\bar{r}^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2}{2\bar{r}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{3\bar{r}^2} - \frac{2}{2\bar{r}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\bar{r}^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\bar{r}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\bar{r}^2} \end{bmatrix}$$

Para ver que el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es máximo basta chequear que

$$h^T H_x L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) h < 0 \quad \forall h \in K(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad h \neq 0 \quad (\Delta)$$

donde

$$K(x, y, z) = \{ h \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g(x)^T h = 0, \nabla f(x)^T h \geq 0 \}$$

(revisar apuntes de cátedra para más detalles)

En nuestro caso la matriz es definida negativa, así que (Δ) se verifica trivialmente $\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad h \neq 0$.
Luego

$$\bar{x} = (r, r, \sqrt{3}r) \quad \text{es el máximo} \quad \square$$