



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Matemática  
MA22A: Cálculo en Varias Variables  
Profesor: Pierre Guiraud  
Auxiliares: Roberto Cortez, Ricardo Díaz

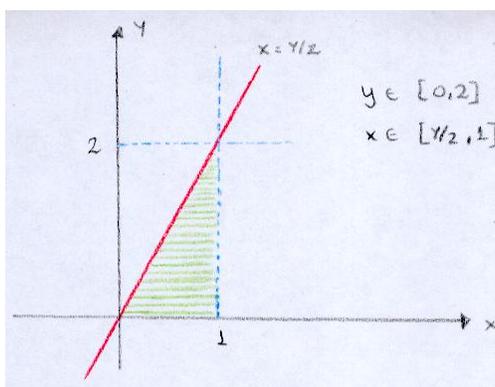
Clase Auxiliar 11

**Problema 1**

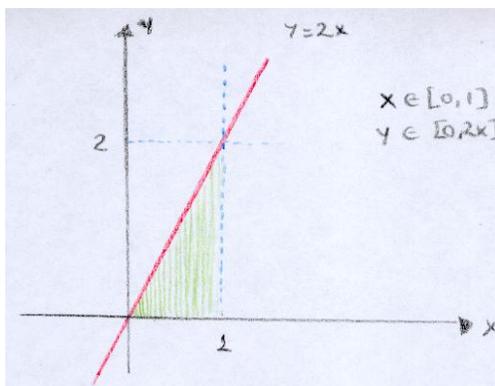
Calcule la siguiente integral:

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3} \partial x \partial y$$

Sol: Notemos primero, como es el dominio:



Pero para poder integrar en este dominio, necesitamos conocer una primitiva para  $e^{x^3}$ , por lo tanto necesitamos mirar el dominio de otra manera, aprovechando que es de “tipo 3” y así usar el teorema de Fubini:



De este modo, podemos escribir la integral como (notese el sentido en que está coloreado el dominio en cada caso):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^{2x} ye^{x^3} \partial y \partial x \\
 &= \int_0^1 e^{x^3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x} \partial x \\
 &= \int_0^1 e^{x^3} 2x^2 \partial x \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^1 e^{x^3} 3x^3 \partial x \\
 &= \frac{2}{3} e^{x^3} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{2}{3} (e - 1)
 \end{aligned}$$

**Problema 2**

Considere la siguiente integral en  $\mathbb{R}^2$ :

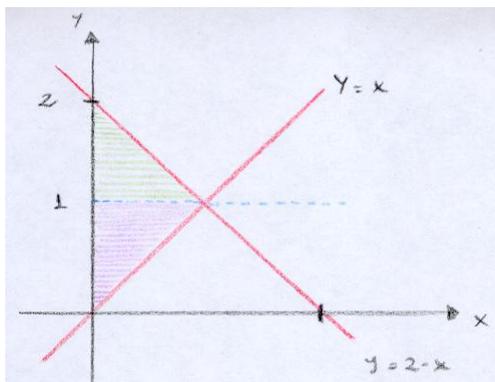
$$I = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) \partial x \partial y + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) \partial x \partial y$$

- (a) Calcule la integral directamente.
- (b) Dibuje la región de integración.
- (c) Calcule la integral de otra forma.

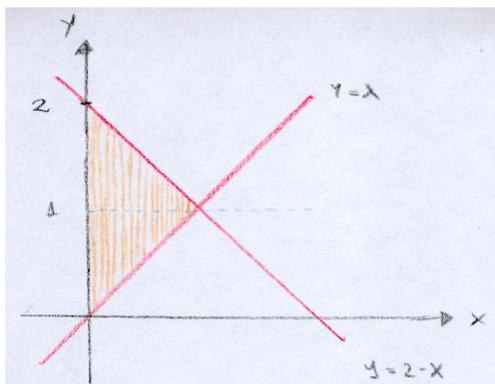
Sol: (a)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) \partial x \partial y + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) \partial x \partial y \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^y \partial y + \int_1^2 \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^{2-y} \partial y \\
 &= \int_0^1 \frac{y^3}{3} + y^3 \partial y + \int_1^2 \frac{(2-y)^3}{3} + y^2(2-y) \partial y \\
 &= \int_0^1 \frac{4y^3}{3} \partial y + \frac{1}{3} \int_1^2 (2-y)^3 \partial y + \int_1^2 2y^2 - y^3 \partial y \\
 &= \frac{4}{3} \left( \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \left( \frac{-(2-y)^4}{4} \right) \Big|_1^2 + \left( \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_1^2 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} (0 - 1) + \left( \frac{16}{3} - \frac{16}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

(b) Dibujando juntas las regiones de integración, tenemos que queda como:



(c) Aprovechando la forma del dominio, calculamos la integral, considerandolo como:



notemos nuevamente que la forma en que está coloreado el dominio sugiere la forma de considerarlo, así la integral queda como:

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) \partial y \partial x$$

Una buena pregunta es, ¿Por que no la puedo escribir como:

$$\int_1^2 \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) \partial x \partial y$$

?

La razón es porque si movemos la variable  $y$  en lugar de  $x$  para escribir las cotas de  $x$  en función de  $y$ , necesariamente debemos separar en dos integrales pues la recta que delimita hasta donde llega  $x$  depende de  $y$  de forma distinta en dos tramos (que es lo que se hizo exactamente en la parte a).

Entonces, calculando:

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) \partial y \partial x$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_x^{2-x} \partial x \\
&= \int_0^1 x^2(2-x-x) + \frac{1}{3}((2-x)^3 - x^3) \partial x \\
&= \int_0^1 2x^3 - 2x^3 \partial x + \int_0^1 (2-x)^3 - x^3 \partial x \\
&= \left(\frac{2x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{(2-x)^4}{4} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - \frac{1}{12}((2-x)^4 + x^4) \Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - \frac{1}{12}(1 - 16 + 1) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

### Problema 3

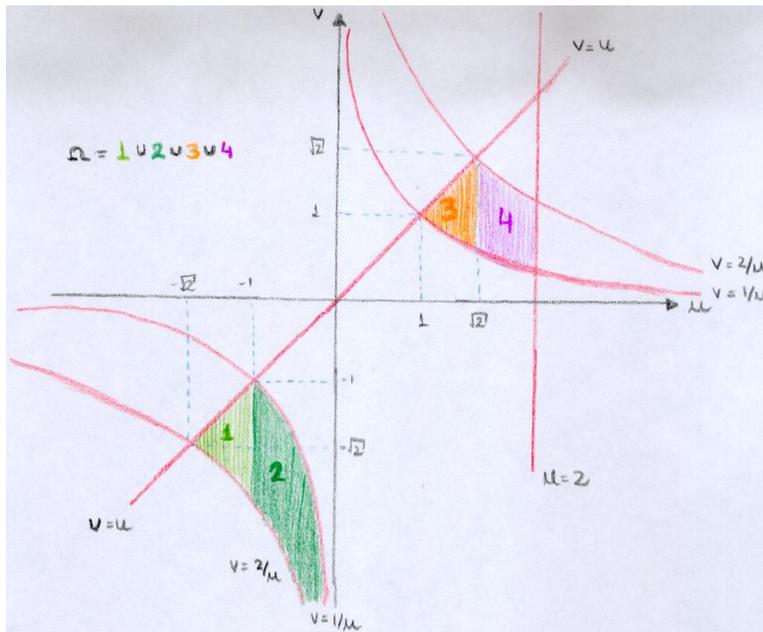
Dibuje la región definida por:

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / uv \geq 1, uv \leq 2, u \leq 2, v \leq u\}$$

y calcule la integral:

$$I = \int_{\Omega} 8u^3 v \partial u \partial v$$

Sol: Dibujamos la región de integración, despejando alguna de las dos variables en las desigualdades para obtener las funciones que restringirán el dominio, de este modo si despejamos  $v$  en todas ellas, obtenemos el siguiente dibujo:



Ahora, podemos plantear la integral como:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

con:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \int_{\frac{2}{u}}^u 8u^3 v \partial v \partial u \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \frac{8}{2} u^3 v^2 \Big|_{\frac{2}{u}}^u \partial u \\ &= 4 \int_{-\sqrt{2}}^{-1} u^3 \left( u^2 - \frac{4}{u^2} \right) \partial u \\ &= 4 \left( \frac{u^6}{6} - 2u^2 \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{-1} \\ &= 4 \left( \frac{1}{6} - 2 - \frac{8}{6} + 4 \right) = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

la segunda integral

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^0 \int_{\frac{2}{u}}^{\frac{1}{u}} 8u^3 v \partial v \partial u \\ &= \int_{-1}^0 8u^3 \frac{v^2}{2} \Big|_{\frac{2}{u}}^{\frac{1}{u}} \partial u \\ &= 4 \int_{-1}^0 u^3 \left( \frac{1}{u^2} - \frac{4}{u^3} \right) \partial u \\ &= 4 \int_{-1}^0 -3u \partial u = 6 \end{aligned}$$

la tercera

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{u}}^u 8u^3 v \partial v \partial u \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} 4u^3 v^2 \Big|_{\frac{1}{u}}^u \partial u \\ &= 4 \int_1^{\sqrt{2}} u^3 \left( u^2 - \frac{1}{u^2} \right) \partial u \\ &= 4 \int_1^{\sqrt{2}} u^5 - u \partial u \\ &= 4 \left( \frac{u^6}{6} - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

y por último

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\frac{1}{u}}^{\frac{2}{u}} 8u^3 v \partial v \partial u \\ &= 4 \int_{\sqrt{2}}^2 u^3 \left( \frac{4}{u^2} - \frac{1}{u^2} \right) \partial u \\ &= 4 \int_{\sqrt{2}}^2 \left( \frac{3}{u^2} \right) u^3 \partial u \\ &= 12 \int_{\sqrt{2}}^2 u \partial u = 12 \end{aligned}$$

$$\therefore, I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{8}{3} + 12 + \frac{10}{3} + 6 = 24.$$