

Pauta control 2

Prof: Michael Kowalcskky

Auxiliar: José Verschae

Ayudante: Diego Moran

18 de junio de 2005

1. a) Encuentre cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$y^4 + k^2 y'' = 0 \quad (1)$$

en el caso que $k \geq 0$.

SOLUCION

Imponiendo una solución de la forma $y(x) = \exp(\lambda x)$ se obtiene el polinomio característico

$$\begin{aligned} \lambda^4 + k^2 \lambda^2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 + k^2) &= 0 \end{aligned}$$

Distinguimos dos casos:

Caso 1: $k = 0$

Si k es 0 el polinomio carac. queda como

$$\lambda^4 = 0$$

con lo que se obtiene cuatro raíces iguales. Luego el conjunto fundamental es $\{1, x, x^2, x^3\}$ **(3pts)**

Caso 1: $k \neq 0$

En este caso las raíces del polinomio característico son $\lambda_{1,2} = 0$; $\lambda_3 = ik$; $\lambda_4 = -ik$. Como tenemos raíces complejas estas nos entregan dos soluciones: $\cos(kx)$ y $\sin(kx)$, que provienen de la parte real e imaginaria de $y(x) = \exp(ikx)$. De la raíz doble $\lambda = 0$ obtenemos las soluciones 1 y x con lo que obtenemos 4 soluciones l.i.. El conjunto fundamental queda $\{1, x, \sin(kx), \cos(kx)\}$ **(7pts)**

b) Encuentre todas las constantes $k \geq 0$ tales que la ecuación (1) con las condiciones de borde

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 & y'(\pi) &= 0 \\ y'''(0) &= 0 & y'''(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución no trivial (ie, no constante).

SOLUCION

También distinguimos dos casos

Caso 1: $k = 0$

En este caso la solución general es

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

Imponiendo las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} y'(0) = 0 &\Rightarrow c_1 + 2c_2 \cdot 0 + 3c_3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y'(\pi) = 0 &\Rightarrow c_1 + 2c_2\pi + 3c_3\pi^2 = 0 \Rightarrow 2c_2 + 3c_3\pi = 0 \\ y'''(0) = 0 &\Rightarrow 6c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \end{aligned}$$

Y reemplazando en la ecuación anterior $\Rightarrow c_2 = 0$. Con lo que se llega a que $y(x) = c_0 \Rightarrow$ sol. trivial. **(5pts)**

Caso 2: $k > 0$

En este caso la sol. gral. es $y(x) = c_1 + c_2x + c_3 \sin(kx) + c_4 \cos(kx)$.

Imponemos las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} y'(0) = 0 &\Rightarrow c_2 + c_3k = 0 \quad (*) \\ y'(\pi) = 0 &\Rightarrow c_2 + c_3k \cos(\pi) - c_4k \sin(\pi) = 0 \quad (**) \\ y'''(0) = 0 &\Rightarrow -c_3k^3 = 0 \quad (***) \\ y'''(\pi) = 0 &\Rightarrow -c_3k^3 \cos(k\pi) + c_4 \sin(k\pi) = 0 \quad (***) \end{aligned}$$

De (***) concluimos que $c_3 = 0$, y reemplazando eso en (*) $\Rightarrow c_2 = 0$. Con esto, y recordando que $k \neq 0$, se llega a que la condición (**) y (***) son equivalentes y implican que $\sin(k\pi) = 0$ lo que implica que $k \in \mathbb{Z}$, pero como $k > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}$ (sin el 0). **(15pts)**

Conclusión : todos los $k \geq 0$ tales que la solución satisface lo pedido son los naturales sin el 0.