

Pauta P2 Control 2 MA26A-5, Otoño 2005

P2 Considere la ecuación:

$$y''' + 3y'' + 2y' = f(x) \quad (2)$$

- a) Encuentre el conjunto fundamental de (2) (10 pts.).

Solución:

Suponemos la solución de la forma $y = e^{\lambda x}$. Reemplazando esto en (2), se obtiene la siguiente ecuación para λ (que nos permiten encontrar las raíces del polinomio característico de (2)):

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

Como obtenemos 3 soluciones distintas, se concluye que el conjunto fundamental de (2) está dado por:

$$\{1, e^{-x}, e^{-2x}\} \square$$

OBS: Recordar que el método entrega un conjunto l.i. de soluciones, luego no es necesario probar este hecho.

- b) Encuentre una solución particular de (2) con $f(x) = e^{-x}$ (10 pts.).

Solución:

Como $f(x) = e^{\lambda_2 x}$ es solución de la ecuación homogénea con λ_2 raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico de (2), por método visto en clases, podemos afirmar que $y_p(x) = Ax^1 e^{-x}$ es una solución particular de (2), para cierta constante A , que debemos determinar.

Para determinar A , reemplacemos y_p en (2) (o sea hay que derivar 3 veces $y_p(x)$); hecho lo anterior y luego de simplificar por e^{-x} , obtenemos la siguiente ecuación:

$$A(3 - x) + 3A(x - 2) + 2A(1 - x) = 1$$

Lo anterior nos dice que $A = -1$, por lo tanto, una solución particular de (2) con $f(x) = e^{-x}$ es

$$y_p(x) = -xe^{-x} \quad \square$$

OBS: La misma solución se podía encontrar usando el método de Variación de Parámetros (pues conocemos el conjunto fundamental de (2)), el puntaje para éste y otros métodos que podrían haber ocupado no varía con respecto al que recibe la solución dada en la pauta (esto si la aplicación del método alternativo es correcta).

- c) Encuentre la solución general de (2) con $f(x) = e^{-x}$ (10 pts.).

Solución:

De la parte a), la solución homogénea de la ecuación está dada por:

$$y_h(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x}$$

donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Sabemos que la solución general y_G de (2) con $f(x) = e^{-x}$ está dada por $y_G = y_h + y_p$, esto es,

$$y_G(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} - xe^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad \square$$