

Clase Auxiliar 14

1. Consideremos un sistema de ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}$$

o, en forma vectorial

$$X' = A \cdot X, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

donde A es una matriz real.

La aplicación $t \mapsto X(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ describe una curva en el espacio \mathbb{R}^2 . Una trayectoria del sistema es

$$\mathcal{C} = \{X(t) \mid t \in I\}.$$

El diagrama de fase es una representación de las trayectorias del sistema.

Analice y dibuje las trayectorias del sistema cerca de su posición de equilibrio ($X \equiv 0$). Considere los casos siguientes

- (a) Los valores propios de la matriz λ_1 y λ_2 son reales y distintos.
- (b) Los valores propios λ_1 y λ_2 son complejos conjugados.
- (c) La matriz A tiene un valor propio real único.

2. Resuelva los sistemas siguientes

(a)

$$X' = A \cdot X, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & 2 \end{bmatrix}$$

por varios k reales. Cómo se cambian las trayectorias cuando $k \approx -\frac{1}{8}$?

(b)

$$X' = A \cdot X, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Considere todos los valores posibles de k .