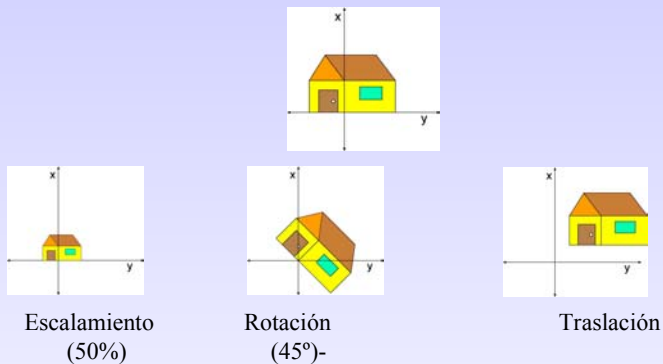


Computación Gráfica

Transformaciones en 2D y 3D

Prof. María Cecilia Rivara
mcrivara@dcc.uchile.cl
Semestre 2006/2

Motivación



Transformación	Representación vectorial / matricial P, P' puntos en el plano $P = [x, y]^T$ $P' = [x', y']^T$
Traslación	$P' = P + T$ $T = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$ vector de traslación
Escalamiento	$P' = SP$ $S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$ matriz de escalamiento
Rotación alrededor del origen en ángulo θ (positivo en sentido contrario punteros reloj)	$P' = RP$ $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ matriz de rotación $RR^T = I$ matriz ortogonal preserva ángulos y longitudes

TRASLACIÓN NO TIENE REPRESENTACIÓN MATRICIAL EN \mathbb{R}^2

No se puede representar en base a multiplicación. DESEABLE!

MCRivara/Comp.
Gráfica/2006/2

3

Coordenadas Homogéneas

- Desarrolladas en Geometría (E. A. Maxwell 1946)

$P = (x, y)$ en $\mathbb{R}^2 \rightarrow P_h = (x_h, y_h, w)$

Representación homogénea de P, donde $x = \frac{x_h}{w}$, $y = \frac{y_h}{w}$

- Propiedades / restricciones
 - Hay infinitas representaciones para un mismo punto
 $(2,3,6) = 4,6,12) = (1/3, 1/2, 1)$
 - Con frecuencia se normaliza $w = 1$
 - Al menos una coordenada es obligatoriamente $\neq 0$
 - El punto $(x, y, 0)$ representa punto en el infinito en la dirección (x, y)
- Estas coordenadas "homogéinizan" el tratamiento del infinito
- EN COMPUTACIÓN GRÁFICA PERMITEN EL TRATO HOMOGÉNEO DE TODAS LAS TRANSFORMACIONES COMO MATRICES

MCRivara/Comp.
Gráfica/2006/2

4

Transformaciones Elementales 2D en Coordenadas Homogéneas

Puntos $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$ Matrices 3 x 3

Traslación $T(dx, dy) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P' = TP$
 $T^{-1} = T(-d_x, -d_y)$

Escalamiento $S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P' = SP$
 $S^{-1} = S(1/s_x, 1/s_y)$

Rotación $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P' = RP$
 $R^{-1} = R^T$

Shearing $SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Composición de Transformaciones 2D

- Se combinan las matrices elementales para producir el efecto deseado
- Se gana eficiencia usando la matriz resultante

Ejemplo: Rotación de un objeto alrededor de punto arbitrario $P_1(x_1, y_1)$

Pasos:

1. Traslade P_1 al origen
2. Rote alrededor del origen
3. Traslade para que el punto en el origen vuelva a P_1

$$\begin{matrix} T(x_1, y_1) & \cdot & R(\theta) & \cdot & T(-x_1, -y_1) & = & M & \text{Matriz Resultante} \\ 3^\circ & & 2^\circ & & 1^\circ & & \end{matrix}$$

SON CONMUTATIVAS LAS TRANSFORMACIONES?

No siempre!

Son conmutativas en DOS dimensiones

- Traslaciones entre sí
- Escalamiento entre sí
- Rotaciones entre sí
- Escalamiento ($s_x = s_y$) y Rotación

Productos arbitrarios de Transformaciones

- Productos de Rotaciones preservan ángulos y longitudes
- Productos de secuencias arbitrarias de transformaciones, preservan paralelismo de las líneas, pero no longitudes ni ángulos

CUIDADO!

Algunos textos de CG, incluyendo primera adición de Foley-van Dam, usan la convención de premultiplicar matrices por vectores fila

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

Se necesita transponer las matrices para pasar de una convención a la otra.

Composición de Transformaciones

Ejercicios

1. Demuestre que puede transformar un segmento de línea, transformando sus puntos extremos y construyendo un nuevo segmento de línea entre los puntos transformados.
2. Demuestre que dos rotaciones sucesivas en 2D son aditivas:
 $R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$
3. Demuestre que en 2D, el escalamiento y la rotación conmutan si $s_x = s_y$ y que si $s_x \neq s_y$ esto no ocurre.
4. Encuentre una expresión para el error acumulado en θ y el número de rotaciones incrementales realizadas

Transformaciones Elementales 3D en Coordenadas Homogéneas

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow P_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix}$$

P_h es representación homogénea de P

$$\text{donde } x = \frac{x_h}{w}, y = \frac{y_h}{w}, z = \frac{z_h}{w}$$

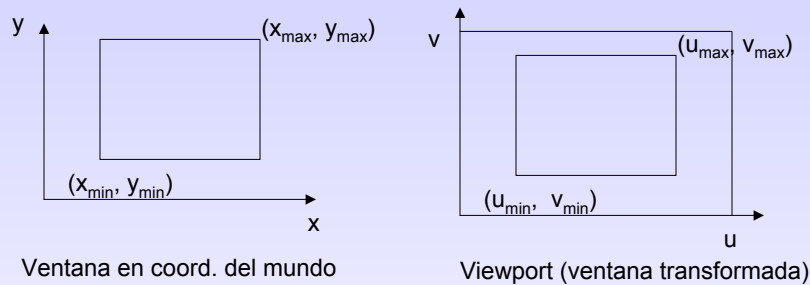
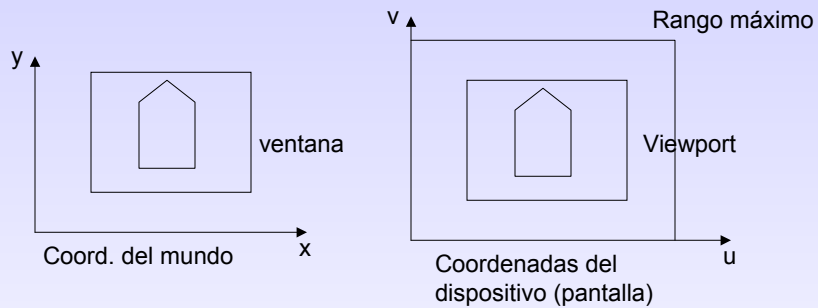
Punto (0, 0, 0, 0) no se permite

Punto (a, b, c, 0) representa punto en el infinito

Transformaciones son matrices de 4x4

Aplicación

Transformación Window-Viewport simple



- Pasos:
- 1) trasladar ventana al origen
 - 2) escalar ventana al tamaño del viewport (equivalente a cambiar de sistema de coordenadas)
 - 3) trasladar por (u_{\min}, v_{\min})

Transformaciones Elementales 3D en Coordenadas Homogénea

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow P_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix}$$

P_h es representación homogénea de P

$$\text{donde } x = \frac{x_h}{w}, y = \frac{y_h}{w}, z = \frac{z_h}{w}$$

Punto (0, 0, 0, 0) no se permite

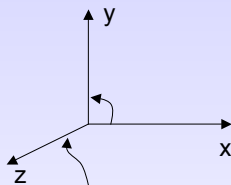
Punto (a, b, c, 0) representa punto en el infinito

Transformaciones son matrices de 4x4

Tres dimensiones

Sistemas de coordenadas (2 alternativas)

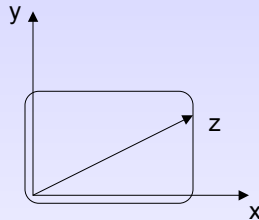
- Orientado a la derecha
- Convención estándar



Sale de la página

- Orientado a la izquierda

asociado de manera natural al manejo de la pantalla: los z mayores están más lejos del punto de vista



Obs: rotaciones positivas se mueven en sentido de los punteros del reloj miradas desde el eje positivo (son idénticas en ambos sistemas)

Transformaciones Elementales 3D (Coord. Homog.)

$$\text{Traslación} \quad T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = (-d_x, -d_y, -d_z)$$

$$\text{Escalamiento} \quad S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z} \right)$$

Rotaciones (en ángulo θ)

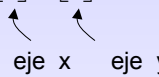
$$\text{alrededor eje z} \quad R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{alrededor eje x} \quad R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{alrededor eje y} \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo : rotación de "eje x" en 90° alrededor eje z

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Shearing $SH_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_{hx} & 0 \\ 0 & 1 & s_{hy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ etc.

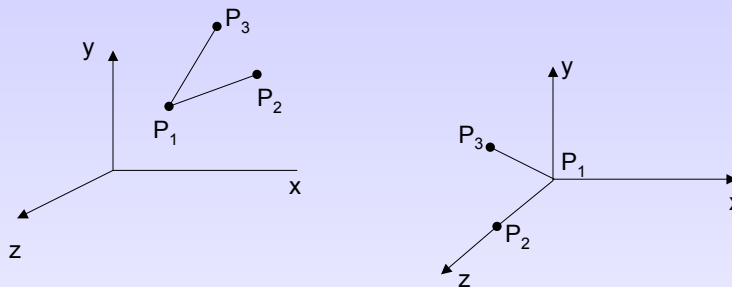
Composición de transformaciones

Matriz agregada $M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

rotaciones y
escalamiento
agregados

Traslaciones agregadas

Ejercicio: Trasladar segmentos orientados $P_1 P_2$ y $P_1 P_3$
tal que $P_1 P_2$ coincida con eje z y $P_1 P_2$ está sobre plano y y z



Una solución:

1. Traslado P_1 al origen
2. Rote alrededor del eje y hasta que $P_1 P_2$ quede sobre plano y y z
3. Rote alrededor del eje x hasta que $P_1 P_2$ quede sobre el eje z
4. Rote alrededor del eje z hasta que $P_1 P_3$ quede en el plano y y z

Ejercicio propuesto: rotación alrededor de eje arbitrario

IMPORTANTE: En 3D las rotaciones no son conmutativas!

Una representación de poliedro: matriz tal que sus columnas son las coordenadas homogéneas de sus vértices.

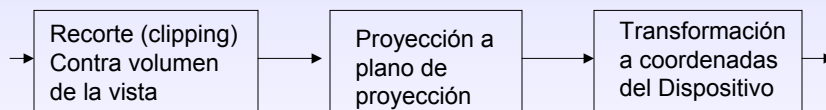
Proceso visualización 3D



Necesitamos

- Proyecciones: transformar objetos 3D en proyecciones en plano 2D
- Volumen de la vista
- Plano de proyección (viewport en el dispositivo)

Conceptualmente



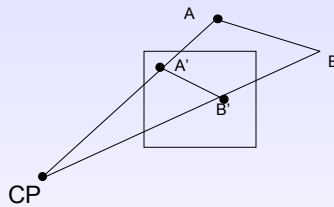
Proyecciones Geométricas Planas

Conceptos: proyectores rectos, centro de proyección, plano de proyección

Proyecciones

Perspectiva

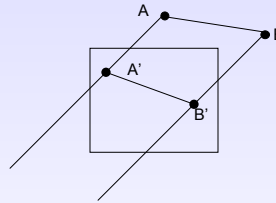
Centro de proyección a distancia finita del plano de proyección



(proyectores convergen)

Paralela

Centro de proyección a distancia infinita del plano de proyección



CP en el infinito
(proyectores paralelos)

MCRivara/Comp.
Gráfica/2006/2

23

Perspectiva

- En la proyección, el tamaño del objeto varía inversamente con la distancia del objeto al centro de proyección.
- Objetos parecen más realistas
- No es útil para almacenar forma y medidas exactas de los objetos. Las líneas paralelas en general no se mantienen paralelas.
- Proyecciones de líneas paralelas que no son paralelas al plano de proyección convergen en un punto de anulación (vanishing point)

MCRivara/Comp.
Gráfica/2006/2

24