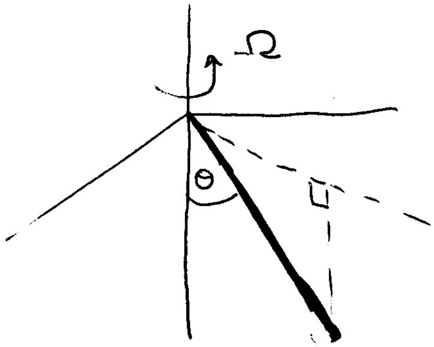
Ejercicio 4.6.7



Debemos encontrar la ec. de mov. para el ángulo θ, único grado de libertad del péndulo.

Sabemos que:

$$L = T - V$$

y que la energía cinética de un sólido rígido se puede escribir cómo:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{V}_0^{\,2}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{traslación}\\ \text{pto. } O}} + \underbrace{M \vec{V}_0 \cdot \vec{V}_{CM}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{mov. del}\\ \text{CM c/r al}\\ \text{pto } O.\\ \vec{V}_{CM}\text{, veloc}\\ \text{del CM c/r}\\ \text{al pto } O.}} + \underbrace{\frac{\vec{L}_0 \cdot \vec{\omega}}{2}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{rotación}\\ \text{en torno}\\ \text{al pto } O.}}$$

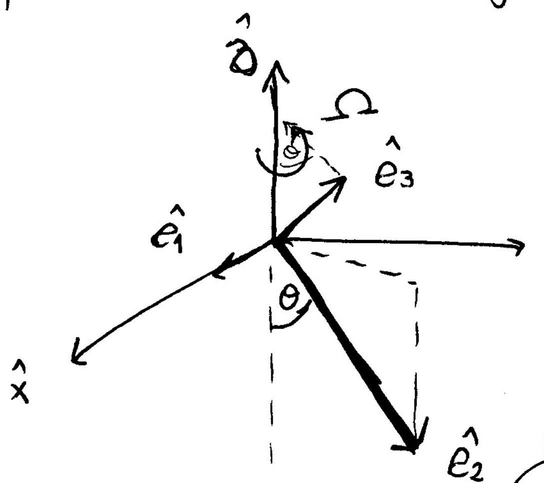
Si tomamos como ref. el pto $O = CM$ tendríamos:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^{\,2}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{traslación}\\ \text{CM}}} + \underbrace{\frac{\vec{L}_{CM} \cdot \vec{\omega}}{2}}_{\substack{\text{rotación}\\ \text{entorno}\\ \text{al CM.}}}$$

En nuestro caso nos conviene tomar el pto O como el pto que está fijo $\Rightarrow \vec{V}_0 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{\vec{L}_0 \cdot \vec{\omega}}{2} = \frac{\overset{\leftrightarrow}{I}_0 \, \vec{\omega}^{\,2}}{2}}$

pero $\overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0$:= matriz de Inercia c/r a O.

Debemos escoger nuestro sistema de coordenadas. Sabemos que $\overleftrightarrow{\mathbb{I}}$ es diagonal en los ejes principales de todo cuerpo, sean estos ejes $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ (solidarios a la barra)



en estos ejes:

$$\overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ML^2 \end{bmatrix}$$

ya que:

$$\mathbb{I}_{xx} = \int dm\,(y^2+z^2)$$

$$= \int \rho\, d\ell\,(y^2+z^2)$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int \frac{M}{L}(y^2+z^2)\,dy$$

pero $z=0$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{xx} = \int_0^L \frac{M}{L} y^2\, dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_{xx} = \frac{1}{3}ML^2}$$

y nos falta $\vec{\omega}$ en las coordenadas $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$.

Es claro que:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_1 + (-\Omega\cos\theta)\,\hat{e}_2 + \Omega\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{3}ML^2\left(\dot{\theta}\,\hat{e}_1 + \Omega\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_3\right)$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 \cdot \vec{\omega}^2 = \frac{1}{3}ML^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\,\text{sen}^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{6}ML^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\,\text{sen}^2\theta\right)}$$

y V si imponemos $U_g = 0$ en el plano xy será:

$$V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$ ya que corresponde a la energía potencial del CM.

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{6}ML^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \operatorname{sen}^2\theta) + Mg\frac{L}{2}\cos\theta}$$

Ahora: las ecs. de Euler nos dicen que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

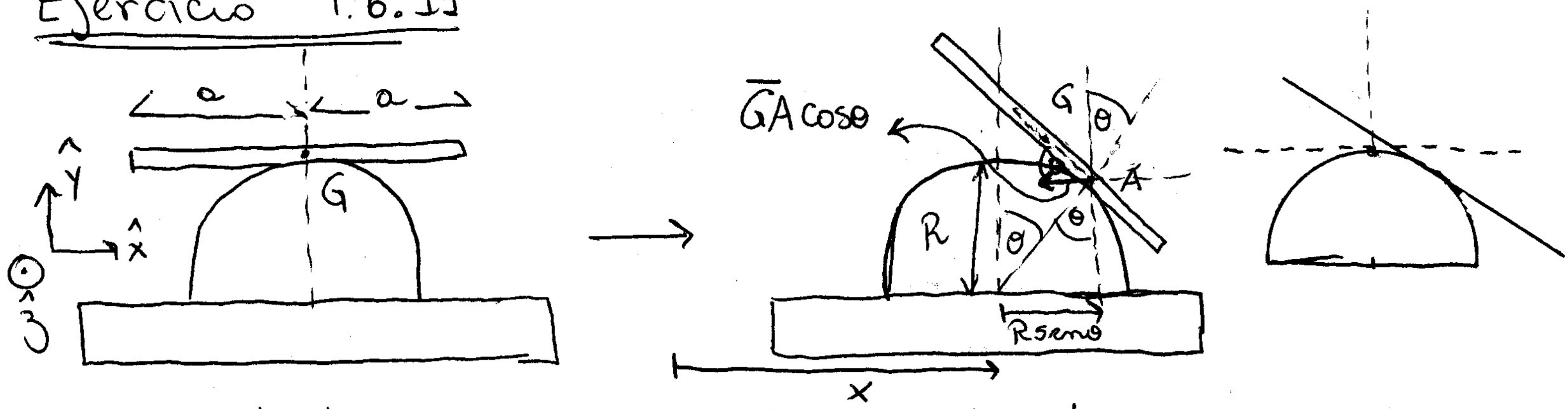
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}\right) - \left(\frac{ML^2}{3}\Omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{MgL}{2}\operatorname{sen}\theta\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} - \frac{1}{6}\Omega^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{MgL}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{ML^2}\ddot{\theta} = \frac{\cancel{ML^2}\Omega^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2} - \frac{3}{2}\cancel{Mg}\cancel{L}^{-1}\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\Omega^2 \operatorname{sen} 2\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta}$$

Ejercicio 4.6.11



Lo importante es escribir bien el Lagrangeano.
Notemos que los grados de libertad son la coordenada "x" que se mueve el hemisferio y el ángulo "θ" que genera la barra en su vaivén c/r al centro del hemisferio.

Entonces, partamos por encontrar $\vec{V}_G = \vec{V}_{cm}$ de la barra.

$$X_G = X \oplus R\,\text{sen}\,\theta \ominus \overline{GA}\cos\theta$$

- X: lo que se movió el hemisferio
- $+$: más el mov. de la barra sobre el hemisferio
- $R\,\text{sen}\,\theta$: distancia desde centro hemisferio hasta A
- $-$: menos la dist que me paso
- $\overline{GA}\cos\theta$: distancia desde A hasta G según x.

notar que $\overline{GA}$ debido a que la barra no desliza es igual al arco abarcado por el ángulo "θ", esto se debe a que la barra se apoya sobre el hemisferio pto a pto.

$$\Rightarrow \overline{GA} = R\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{X_G = X + R\,\text{sen}\,\theta - R\theta\cos\theta}$$

Del mismo modo calculamos

$$y_G = \underbrace{R\cos\theta}_{\substack{\text{altura} \\ \text{pto. A}}} + \underbrace{R\theta\,\mathrm{sen}\theta}_{\substack{\text{altura G} \\ \text{c/r a A.}}}$$

y como necesitamos $T \Rightarrow$ necesitamos $\dot{x}_G, \dot{y}_G$

$$\Rightarrow \dot{x}_G = \dot{x} + R\cos\theta\,\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta + R\theta\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta} = \dot{x} + R\theta\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y}_G = \cancel{-R\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta}} + \cancel{R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta} + R\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = R\theta\dot{\theta}\cos\theta.$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}_{\substack{\text{energía} \\ \text{hemisferio}}} + \underbrace{\frac{1}{2}M\left[(\dot{x} + R\theta\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta})^2 + R^2\theta^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right]}_{\substack{\text{energía traslación} \\ \text{CM barra}}}$$

$$+ \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathbb{I}}_{CM}\,\vec{\omega}^{\,2}$$

Este problema ocurre sólo en 2D $\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_{CM} \longrightarrow I_{CM}$

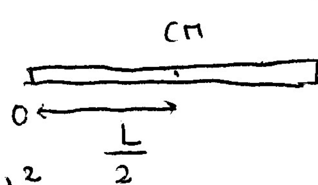
hemos elegido CM como pto. de rotación $\Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{12}M(2a)^2$

$$\Rightarrow \boxed{I_{CM} = \frac{1}{3}M a^2}$$

Sabemos que cuando una barra rota c/r a un extremo, su momento de inercia es: $I = \frac{1}{3}ML^2$ pero si aplicamos Teo. de Steiner:

y notar que $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{z}$

$$I^O = M\left(\begin{matrix}\text{distancia paralela} \\ \text{al eje de rotación} \\ \text{"CM"}\end{matrix}\right) + I^{CM}$$



Entonces: $I^{CM} = I^O - M\,\text{dist}$

$$\Rightarrow I^{CM} = \frac{1}{3}ML^2 - M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{12}ML^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + 2R\theta\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta + R^2\theta^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{6}Ma^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + 2R\theta\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta + R^2\theta^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{6}Ma^2\dot{\theta}^2 - Mg(R\cos\theta + R\theta\,\mathrm{sen}\theta) - Mg\cdot \text{algo}$$

Notar que $Mg(R\cos\theta + R\theta\,\mathrm{sen}\theta)$ corresponde a la energía potencial del CM de la barra y que Mg algo al potencial del CM del hemisferio. He puesto "algo" que corresponde a la altura del CM pero fijarse que es cte. por lo cual, cuando busque las ecuaciones de Lagrange esa algo no contribuye en nada.

Entonces:

<u>Ecuaciones para x:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + M\dot{x} + MR\theta\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2M\dot{x} + MR\theta\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta = cte.$$

$$\text{ó} \quad 2M\ddot{x} + MR\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\theta + MR\theta\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta + MR\theta\dot{\theta}^2\cos\theta = 0$$

<u>Ecuaciones para θ:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(MR\theta\dot{x}\,\mathrm{sen}\theta + MR^2\theta^2\dot{\theta}\right) = MR\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta +}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(MR\theta\dot{x}\operatorname{sen}\theta + MR^2\theta^2\dot{\theta} + \frac{1}{3}Ma^2\dot{\theta} \right)$$

$$= MR\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + MR\theta\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + MR^2\theta\dot{\theta}^2 + \cancel{MgR\operatorname{sen}\theta}$$
$$- \cancel{MgR\operatorname{sen}\theta} - MgR\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow MR\cancel{\dot{\theta}\dot{x}}\operatorname{sen}\theta + MR\theta\ddot{x}\operatorname{sen}\theta + MR\cancel{\theta\dot{x}}\cos\theta\dot{\theta} + 2MR^2\theta\dot{\theta}^2 + MR^2\theta^2\ddot{\theta}$$
$$+ \frac{1}{3}Ma^2\ddot{\theta} = MR\cancel{\dot{x}\dot{\theta}}\operatorname{sen}\theta + MR\theta\cancel{\dot{x}\dot{\theta}}\cos\theta + MR^2\theta\dot{\theta}^2$$
$$- MgR\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow MR\theta\ddot{x}\operatorname{sen}\theta + 2MR^2\theta\dot{\theta}^2 + MR^2\theta^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}Ma^2\ddot{\theta}$$
$$= MR^2\theta\dot{\theta}^2 - MgR\theta\operatorname{sen}\theta$$