EJERCICIO 09
SISTEMAS DINAMICOS FI21B-2002-02

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: CLAUDIO FALCÓN Y MIGUEL TREJO

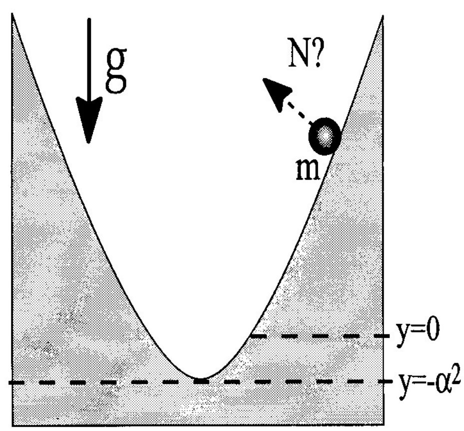
Fuerza Normal: Considere una partícula puntual de masa m bajo la influencia de un campo gravitacional constante g. La partícula se muevo sobre una parábola caracterizada por la ecuación.

$$y = \frac{x^2}{\alpha^2} - \alpha^2$$

donde x e y son las coordenadas horizontal y vertical de la partícula respectivamente, y α parámetro que caracteriza la parábola (ver figura).

8-a Encuentre la ecuación que caracteriza la dinámica de esta partícula sobre la parábola , es decir, su ecuación de movimiento .

8-a Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre la fuerza normal que actúa sobre la partícula[1]. Interprete fisicamente los diferentes términos que componen la fuerza normal.

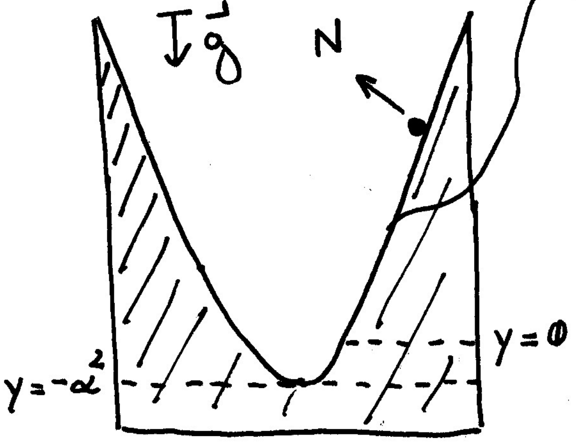


Dificultad 5.9.

[1]INDICACION: La determinación de la fuerza normal puede ser simplificada si uno considera coordenadas parabólicas, definidas por

$$\begin{aligned} y &= \frac{u^2 - v^2}{2}, \\ x &= uv. \end{aligned}$$

El cual es un sistema de coordenadas ortogonales.

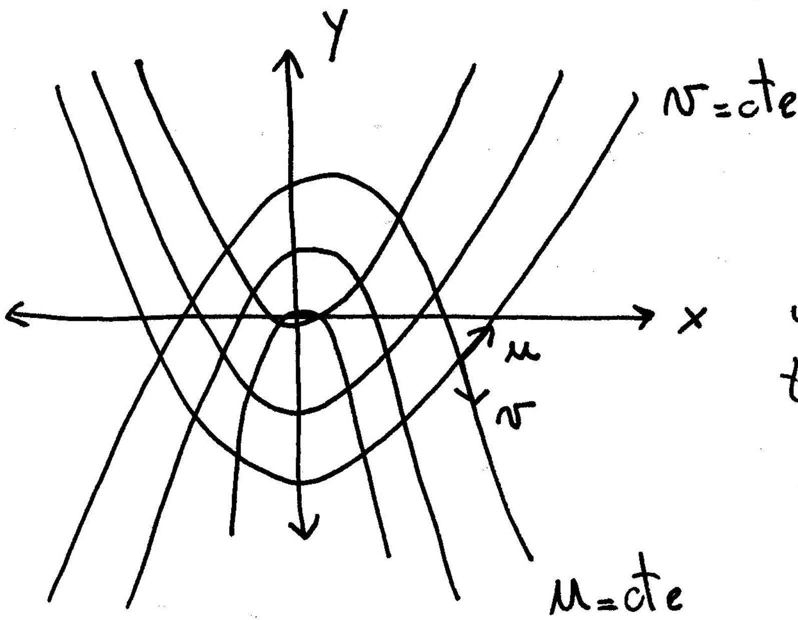


$$y = \frac{x^2}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}$$

cambio de variable:

$$x = \mu v$$

$$y = \frac{\mu^2 - v^2}{2}$$



Debemos encontrar una parábola a v=cte tiene concavidad positiva.

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\mu^2 - v^2}{2}$$

si $\quad \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{\alpha^2}{2} \Rightarrow v = \alpha$

$$\Rightarrow x = \mu v = \mu \alpha$$

Entonces: $\quad y = \dfrac{x^2}{2\alpha^2} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{\mu^2\alpha^2}{2\alpha^2} - \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{\mu^2 - v^2}{2}$

$\Rightarrow$ la parábola buscada es $\boxed{v = \alpha = \text{cte}}$

Ahora:

$$x = uv \Rightarrow \dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v}$$

$$y = \frac{u^2 - v^2}{2} \Rightarrow \dot{y} = \frac{2u\dot{u} - 2v\dot{v}}{2} = u\dot{u} - v\dot{v}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \dot{u}^2 v^2 + 2u\dot{u}v\dot{v} + u^2\dot{v}^2$$

$$\dot{y}^2 = u^2\dot{u}^2 - 2u\dot{u}v\dot{v} + v^2\dot{v}^2$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{u}^2(u^2+v^2) + \dot{v}^2(u^2+v^2)$$

$$= (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)(u^2+v^2)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda\,(\text{constricción})$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)(u^2+v^2) - mg\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right) + \lambda(v - \alpha)$$

si $v = \alpha$

$\Rightarrow$ parábola q' buscamos.

Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\dot{u}(u^2+v^2) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = m\ddot{u}(u^2+v^2) + m\dot{u}(2u\dot{u} + 2v\dot{v}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = m(\dot{u}^2+\dot{v}^2)u - mgu$$

$$\Rightarrow m\ddot{u}(u^2+v^2) + m\dot{u}(2u\dot{u}+2v\dot{v}) = m(\dot{u}^2+\dot{v}^2)u - mgu \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = m\dot{v}(u^2+v^2) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right) = m\ddot{v}(u^2+v^2) + m\dot{v}(2u\dot{u}+2v\dot{v})$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = m(\dot{u}^2+\dot{v}^2)v + mgv + \lambda$$

$$\Rightarrow m\ddot{v}(u^2+v^2) + m\dot{v}(2u\dot{u}+2v\dot{v})$$

$$= m(\dot{u}^2+\dot{v}^2)v + mgv + \lambda \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow v - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \alpha}$$

$$\Rightarrow (2) \Rightarrow 0 = m\dot{u}^2\alpha + mg\alpha + \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -(m\dot{u}^2\alpha + mg)}$$

$$(1) \Rightarrow \cancel{m}\ddot{u}\,(u^2+\alpha^2) + \cancel{m}\dot{u}\,2u\dot{u} = \cancel{m}\dot{u}^2 u - \cancel{m}gu$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u}\,(u^2+\alpha^2) = -u\dot{u}^2 - gu}$$