

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**IN41B**

**AUXILIAR N° 13**  
**CRECIMIENTO:**  
**MODELO DE SOLOW<sup>1</sup>**

**PROFESORA: ANDREA REPETTO**  
**AUXILIARES: GRACIELA PÉREZ**  
**CARLOS RAMÍREZ**  
**SEMESTRE: PRIMAVERA 2006**

---

<sup>1</sup> Basada en clase preparada por Raphael Bergoeing. IN41B. 2005.

*i.- RESOLUCIÓN CONTROL*

*ii- CRECIMIENTO  
MOTIVACIÓN*

*HECHOS ESTILIZADOS DE KALDOR*

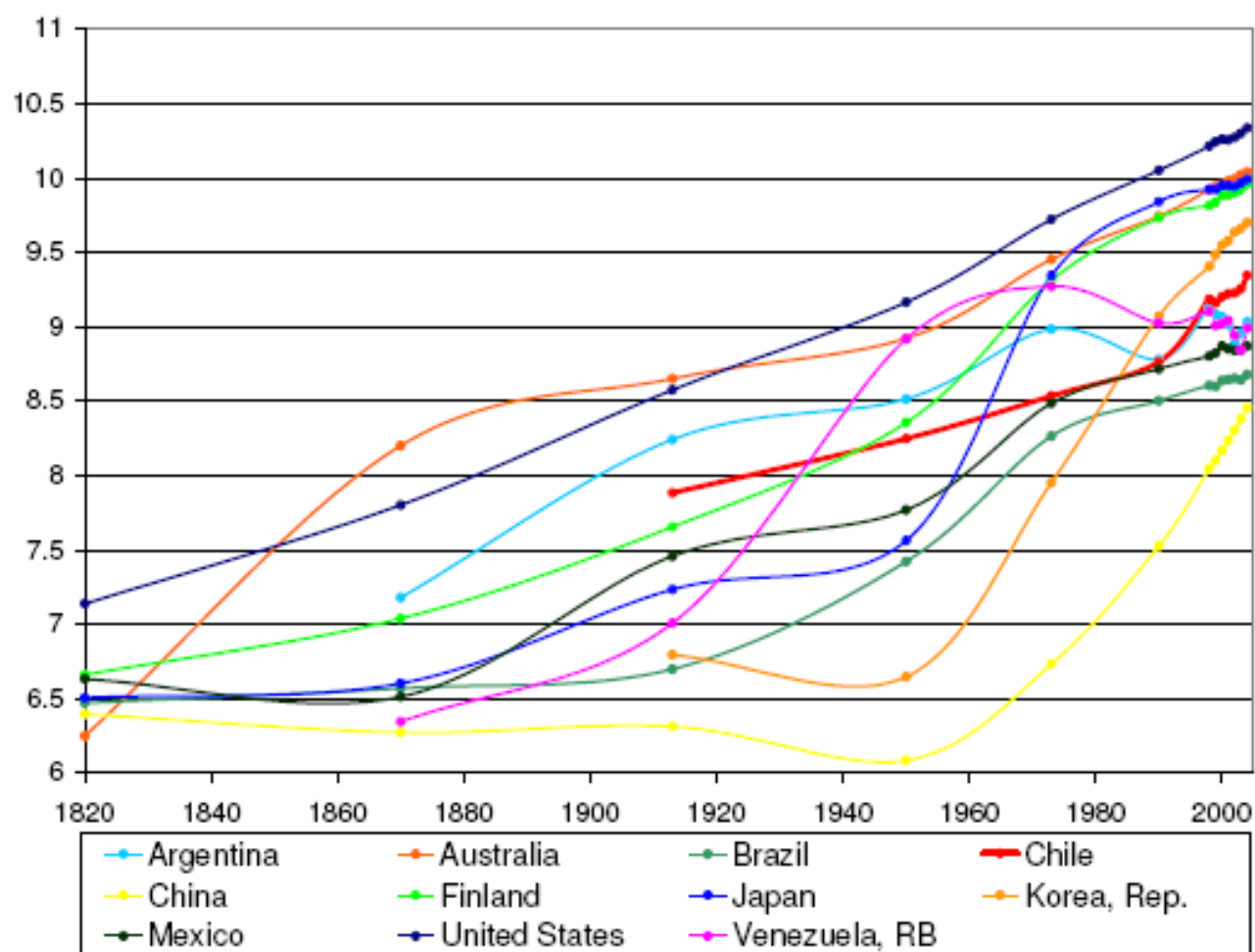
*MODELO DE SOLOW*

- (a) MODELO*
- (b) ESTABILIDAD*
- (c) DINÁMICA DEL CAPITAL*
- (d) EQUILIBRIO*
- (e) CONVERGENCIA*
- (f) PROBLEMAS DEL MODELO*

*iii.- EJERCICIOS*

*ii- CRECIMIENTO*  
*MOTIVACIÓN*

- ¿Cómo evoluciona la producción (de pleno empleo) de una economía en el  $t$ ?
- ¿Qué hace crecer a los países?
- ¿Por qué existen países que crecen y otros que no? ¿Qué los diferencia?
- ¿Qué políticas públicas puedan incrementar el crecimiento?



Fuente: Maddison (1995) y Banco Mundial (2005)

Figura 1: PIB per cápita a PPC (log) 1820-2004.

*HECHOS ESTILIZADOS DE KALDOR*

- 1.  $Y/L$  crece a una tasa constante.*
- 2.  $K/L$  crece a una tasa constante.*
- 3.  $K/Y$  se mantiene constante.*
- 4.  $rK/Y$  y  $wL/Y$  se mantienen constantes.*
- 5.  $Y/L$  difiere sustancialmente entre países.*

## MODELO DE SOLOW

### (a) MODELO

1.  $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$ ,  $F(0)=0$ ,  $F'>0$ ,  $F''<0$ , RCE, Inada.
2.  $L(t+1) = (1+n)L(t)$
3.  $A(t+1) = (1+g)A(t)$
4.  $Y(t) = C(t) + I(t)$
5.  $I(t) = sY(t)$
6.  $K(t+1) = (1-\delta)K(t) + I(t)$

*Enfatiza cambios en K/L durante transición al equilibrio de l/p. Harrod-Domar usaba proporciones fijas.*

*Pero, modelo simple: no tiene gobierno, un bien, tasas de ahorro constante (no microfundada), sin distorsiones.*

(b) EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

*¿Converge el modelo a  $k^*$  globalmente?*

*Sí. Permite pensar en equilibrio de largo plazo (estado estacionario o crecimiento balanceado)*

*Modelo en forma intensiva ( $x(t) \equiv X(t) / A(t) L(t) \Rightarrow$  unidades efectivas de trabajo):*

7.  $y(t) = f(k(t))$ , con  $f(k(t)) \equiv F(K(t), A(t)L(t)) / A(t) L(t) = F(k(t), 1)$

8.  $y(t) = c(t) + i(t)$

9.  $i(t) = sy(t)$

10.  $k(t+1)(1+z) = (1-\delta) k(t) + i(t)$ , con  $(1+z) \equiv (1+g)(1+n)$

*Para determinar si, dado  $k > 0$ ,  $k$  converge a un único  $k^*$ , analicemos  $\Delta k(t)$  :*

*Definiendo  $\Phi(k(t)) = k(t+1) - k(t) =$*

$$\Rightarrow \Phi(k^*) = 0$$

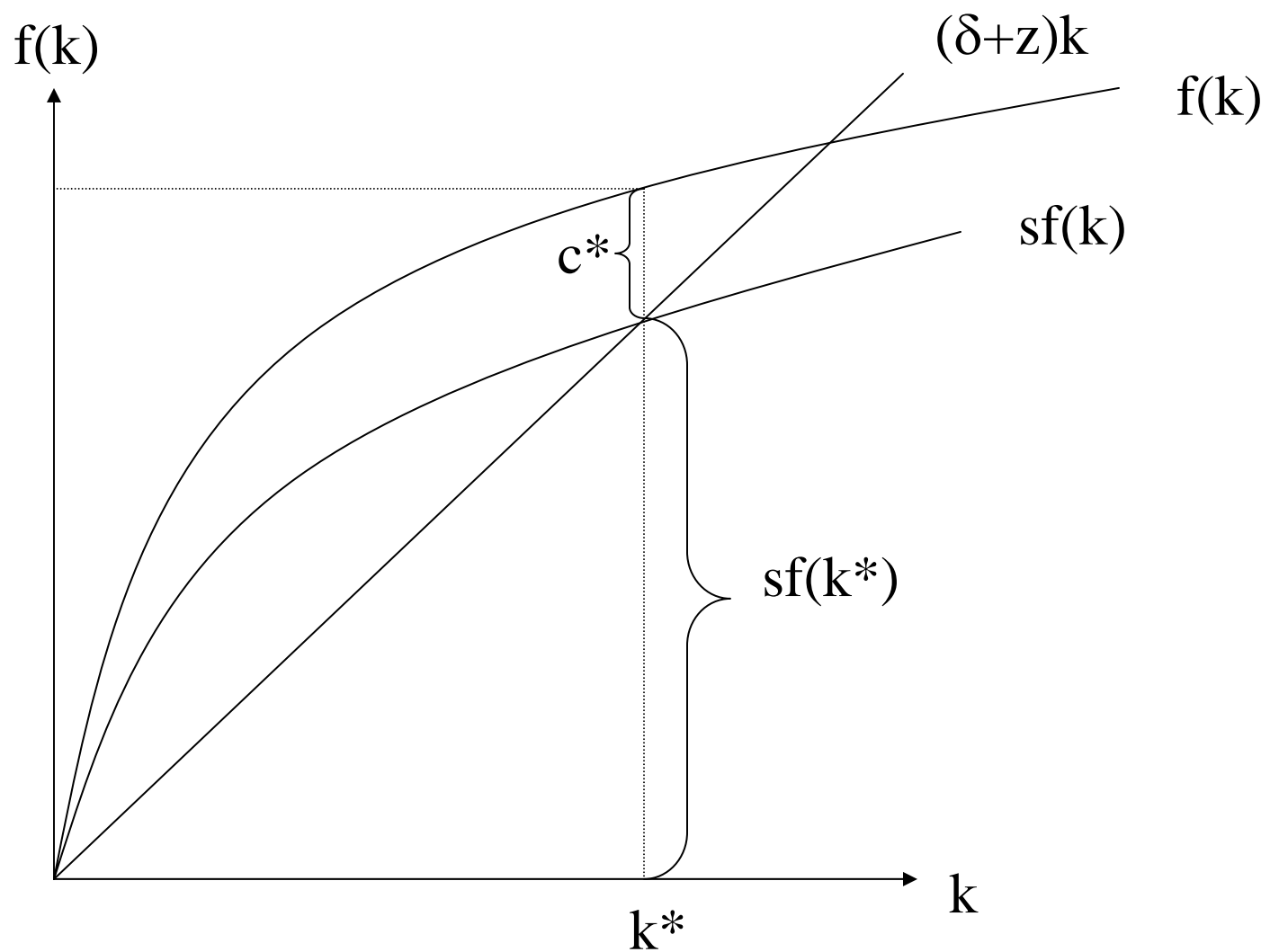
$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(k(t)) > 0, \forall k(t) \in (0, k^*)$$

$$\Phi(k(t)) < 0, \forall k(t) \in (k^*, \infty)$$



(c) *DINÁMICA DEL CAPITAL*



(d) EQUILIBRIO

*Definición: Un Equilibrio de Largo Plazo es un equilibrio en el que las variables per cápita crecen a una tasa constante (crecimiento balanceado - si  $g \neq 0$ ) o en el que las variables per cápita se mantienen constantes (estado estacionario - si  $g = 0$ ).*

*Caracterización del equilibrio de L/P:*

*¿Qué pasa en  $k^*$ ?*

*L crece a  $(1+n)$  y A crece a  $(1+g)$ .*

*$\Rightarrow$  AL crece a  $(1+z)$ , K crece a  $(1+z)$ , Y crece a  $(1+z)$ .*

*$\Rightarrow$  y está constante, k está constante.*

*$\Rightarrow$  Y/L crece a  $(1+g)$ , K/L crece a  $(1+g)$ .*

*Kaldor (1 - 3) ok. Para Kaldor (4) es necesario imponer funciones de producción específicas, como la Cobb-Douglas*

*Nótese que si  $g = 0$ , las variables per cápita se mantienen constantes en el L/P.*

(e) CONVERGENCIA

*Diferenciando  $\Phi(k)/k$  para analizar la velocidad de convergencia, se obtiene que:*

$$\Phi(k)/k < 0$$

*=> Si tenemos 2 economías con el mismo crecimiento balanceado (CB) pero con distintos niveles iniciales de  $k_0$  (y de producto), la economía más pobre crecerá a una tasa mayor (“convergencia absoluta”). Si las economías tienen distintos CB (por ejemplo, por distinto  $s$ ), sólo podemos decir que la economía que se encuentra más lejos de su propio CB crecerá más rápido. (“convergencia condicional”)*

*(f) PROBLEMAS DEL MODELO*

*(A) s constante: ¿Por qué algunos países ahorran más que otros?*

*(B) No explica hecho 5 con idénticas tecnologías: Ejemplo USA - Chile. (nivel de PTF)*

### iii.- EJERCICIOS

Recuerde que en el modelo de Solow el producto  $Y$ , viene dado por:

$$Y = F(K, L) \quad (1)$$

donde estamos ignorando los incrementos de productividad;  $K$  y  $L$  denotan capital y trabajo; y la función de producción  $F$  exhibe retornos constantes de escala, es creciente en cada uno de sus argumentos, tiene retornos decrecientes en cada uno de los argumentos y cumple con las condiciones de Inada. La razón capital-trabajo se denota mediante  $k = K/L$  y la forma intensiva de la función de producción viene dada por

$$y = f(k) \quad (2)$$

donde  $f(k) = F(K/L, 1)$ . La dinámica del capital queda caracterizada por (3):

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

donde  $s$ ,  $n$  y  $\delta$  denotan la tasa de ahorro, tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital, respectivamente. Las tres tasas son exógenas al modelo. En este problema consideramos una economía pobre (es decir, con menos capital que en estado estacionario) y estudiamos como evolucionan los precios de los factores (salario y retornos al capital) camino al estado estacionario.

a) Suponga que el pago al capital  $r$ , viene dado por  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial K}$  y el salario,  $w$ , por

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}. \text{ ¿Bajo que condiciones es apropiado este supuesto?}$$

Estas expresiones sólo se dan bajo competencia perfecta.

b) Muestre que  $r = f'(k)$  y  $w = f(k) - kf'(k)$ . Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.

Tenemos que  $Y = F(K, L) = LF(k, 1) = Lf(k)$ , por lo tanto derivando con respecto a  $L$  tenemos que:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = w = f(k) - Lf'(k)\frac{K}{L^2} = f(k) - kf'(k).$$

Por otra parte tenemos que si

$$\max_{\{K\}} F(K, L) - rK - wL$$

Factorizando por  $L$  obtenemos que

$$\max_{\{k\}} L(f(k) - rK - w)$$

la condición de primer orden es  $f'(k) = r$ .

c) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que  $rK + wL = F(K, L)$ .

# UNIVERSIDAD DE CHILE

## IN41B

Sabemos que la función de producción tiene retornos constantes a escala, es decir:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

Derivando con respecto a  $\lambda$  obtenemos que

$$F_K K + F_L L = F(K, L)$$

Sabemos que bajo competencia perfecta se tiene que  $r = F_K$  y  $w = F_L$ . Por lo tanto bajo estos supuestos se tiene que:

$$rK + wL = F(K, L)$$

- d) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.

Sabemos que el pago del capital esta dado por  $r = f'(k)$ . Para determinar qué sucede con este pago cuando la economía se aproxima al estado estacionario, derivamos esa expresión respecto a  $k$ . Esto nos da:

$$\frac{\partial r}{\partial k} = f''(k) < 0$$

es decir a medida que mantenemos fijo el stock de trabajo y aumentamos la cantidad de capital su rentabilidad cae, esto porque cada unidad extra de capital rinde menos. Para determinar qué sucede con el salario, derivamos la expresión del salario y la derivamos respecto a  $k$ , esto nos da:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = -k f''(k) > 0$$

- e) Suponga que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de cambio del pago al capital  $\gamma_r = \dot{r} / r$  y la tasa de cambio del salario  $\gamma_w = \dot{w} / w$ . Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.

Si la función de producción es Cobb-Douglas entonces  $Y = F(K;L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ . Expresando la función en términos per capita se tiene que  $y = k^\alpha$ . Por lo tanto se tiene que:

$$\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)} = \frac{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\dot{k}}{\alpha k^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{\dot{k}}{k}$$

Por otro lado:

$$\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w} = \frac{-\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}\dot{k}}{(1-\alpha)k^\alpha} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$