

**UNIVERSIDAD DE CHILE
IN41B**

**AUXILIAR N° 13
CRECIMIENTO:
MODELO DE SOLOW¹**

**PROFESORA: ANDREA REPETTO
AUXILIARES: GRACIELA PÉREZ
CARLOS RAMÍREZ
SEMESTRE: PRIMAVERA 2006**

¹ Basada en clase preparada por Raphael Bergoeing. IN41B. 2005.

i.- RESOLUCIÓN CONTROL

*ii- CRECIMIENTO
MOTIVACIÓN*

HECHOS ESTILIZADOS DE KALDOR

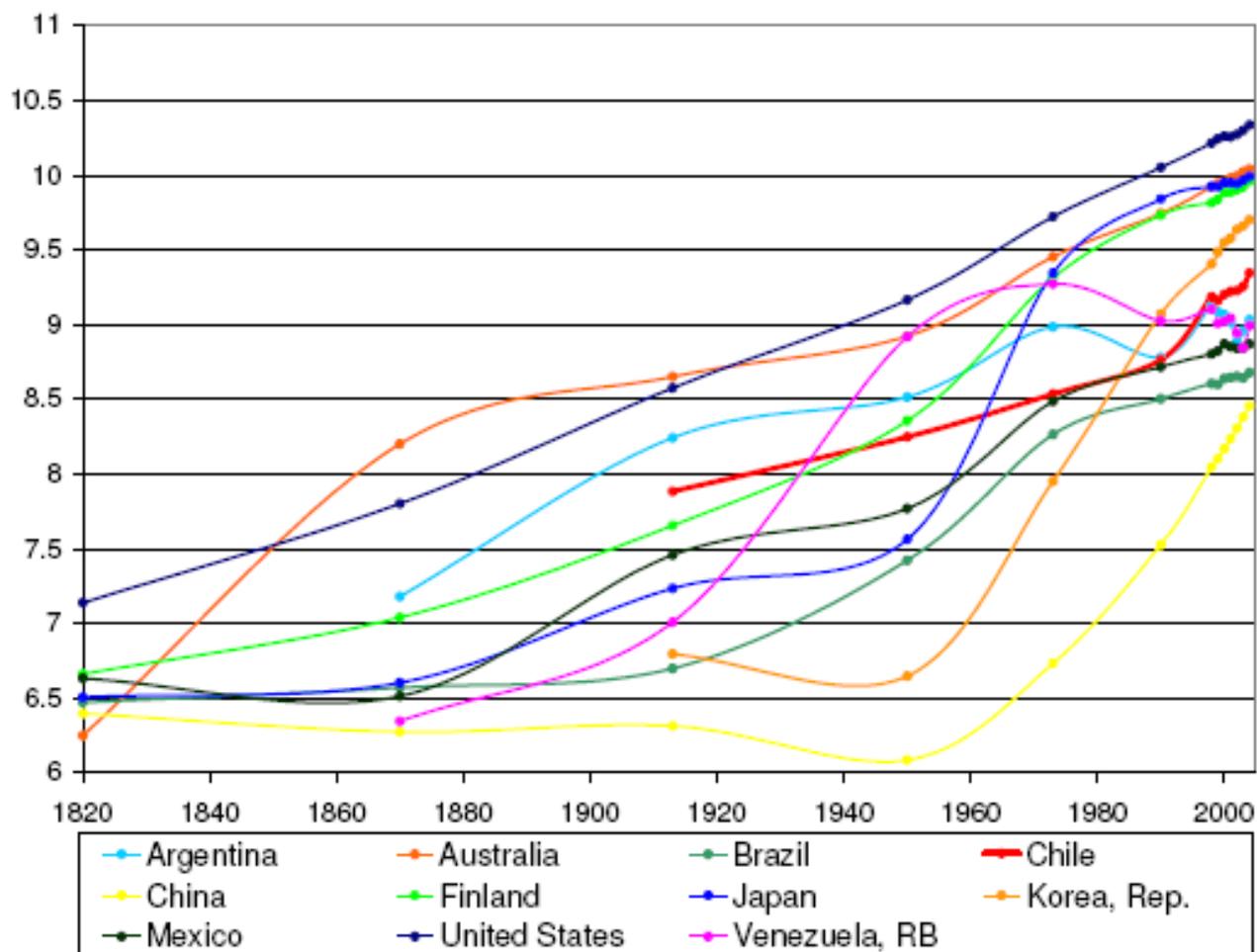
MODELO DE SOLOW

- (a) MODELO*
- (b) ESTABILIDAD*
- (c) DINÁMICA DEL CAPITAL*
- (d) EQUILIBRIO*
- (e) CONVERGENCIA*
- (f) PROBLEMAS DEL MODELO*

iii.- EJERCICIOS

ii- CRECIMIENTO
MOTIVACIÓN

- ¿Cómo evoluciona la producción (de pleno empleo) de una economía en el t ?
- ¿Qué hace crecer a los países?
- ¿Por qué existen países que crecen y otros que no? ¿Qué los diferencia?
- ¿Qué políticas públicas puedan incrementar el crecimiento?



Fuente: Maddison (1995) y Banco Mundial (2005)

Figura 1: PIB per cápita a PPC (log) 1820-2004.

HECHOS ESTILIZADOS DE KALDOR

- 1. Y/L crece a una tasa constante.*
- 2. K/L crece a una tasa constante.*
- 3. K/Y se mantiene constante.*
- 4. rK/Y y wL/Y se mantienen constantes.*
- 5. Y/L difiere sustancialmente entre países.*

MODELO DE SOLOW

(a) MODELO

1. $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$, $F(0)=0$, $F' > 0$, $F'' < 0$, RCE, Inada.
2. $L(t+1) = (1+n)L(t)$
3. $A(t+1) = (1+g)A(t)$
4. $Y(t) = C(t) + I(t)$
5. $I(t) = sY(t)$
6. $K(t+1) = (1-\delta)K(t) + I(t)$

Enfatiza cambios en K/L durante transición al equilibrio de l/p. Harrod-Domar usaba proporciones fijas.

Pero, modelo simple: no tiene gobierno, un bien, tasas de ahorro constante (no microfundada), sin distorsiones.

(b) EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

¿Converge el modelo a k^* globalmente?

Sí. Permite pensar en equilibrio de largo plazo (estado estacionario o crecimiento balanceado)

Modelo en forma intensiva ($x(t) \equiv X(t) / A(t) L(t) \Rightarrow$ unidades efectivas de trabajo):

7. $y(t) = f(k(t))$, con $f(k(t)) \equiv F(K(t), A(t)L(t)) / A(t) L(t) = F(k(t), 1)$

8. $y(t) = c(t) + i(t)$

9. $i(t) = sy(t)$

10. $k(t+1)(1+z) = (1-\delta) k(t) + i(t)$, con $(1+z) \equiv (1+g)(1+n)$

Para determinar si, dado $k > 0$, k converge a un único k^ , analicemos $\Delta k(t)$:*

Definiendo $\Phi(k(t)) = k(t+1) - k(t) =$

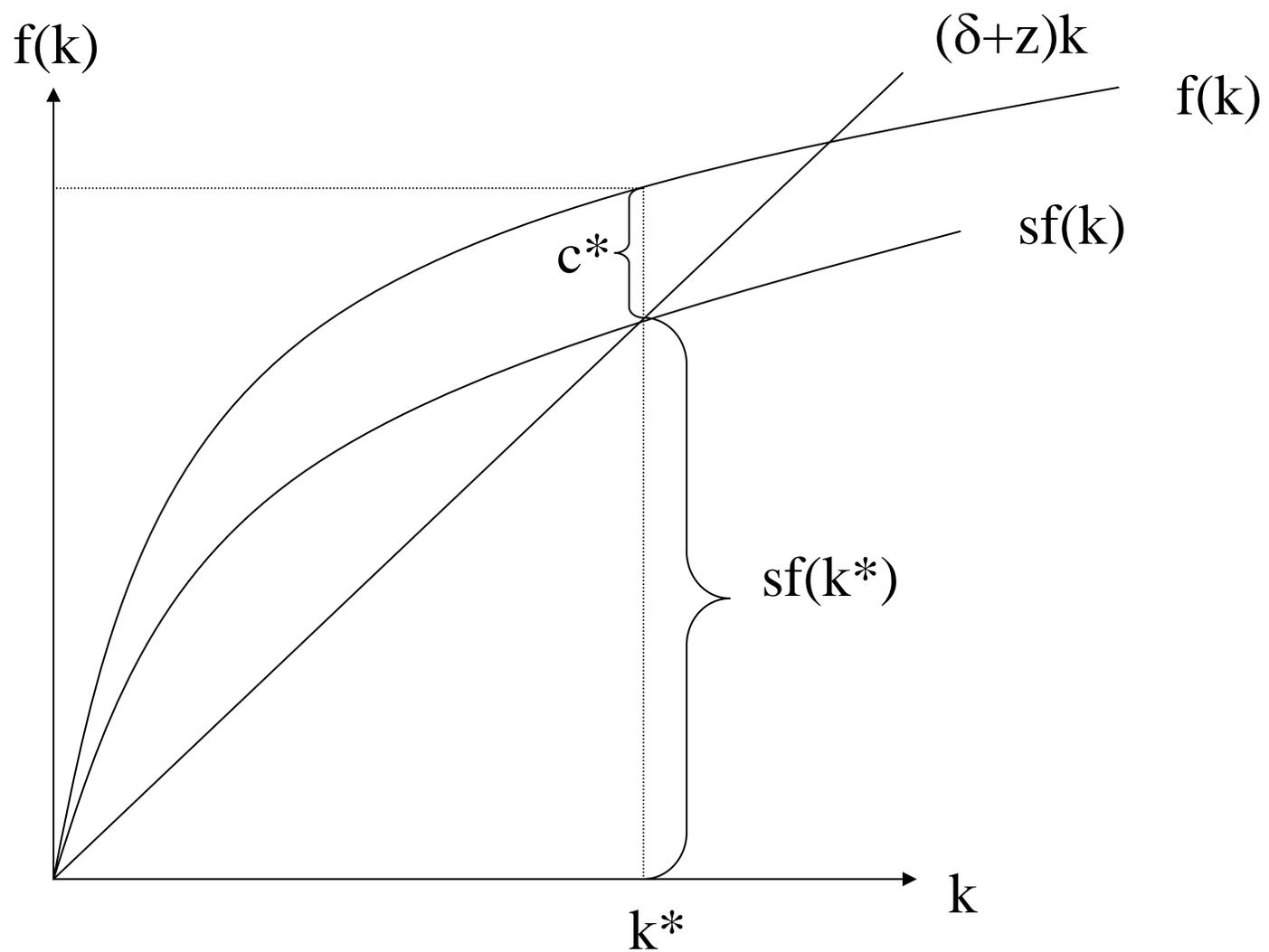
$$\Rightarrow \Phi(k^*) = 0$$

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(k(t)) > 0, \forall k(t) \in (0, k^*)$$

$$\Phi(k(t)) < 0, \forall k(t) \in (k^*, \infty)$$

(c) *DINÁMICA DEL CAPITAL*



(d) EQUILIBRIO

Definición: Un Equilibrio de Largo Plazo es un equilibrio en el que las variables per cápita crecen a una tasa constante (crecimiento balanceado - si $g \neq 0$) o en el que las variables per cápita se mantienen constantes (estado estacionario - si $g = 0$).

Caracterización del equilibrio de L/P:

¿Qué pasa en k^ ?*

L crece a $(1+n)$ y A crece a $(1+g)$.

\Rightarrow AL crece a $(1+z)$, K crece a $(1+z)$, Y crece a $(1+z)$.

\Rightarrow y está constante, k está constante.

\Rightarrow Y/L crece a $(1+g)$, K/L crece a $(1+g)$.

Kaldor (1 - 3) ok. Para Kaldor (4) es necesario imponer funciones de producción específicas, como la Cobb-Douglas

Nótese que si $g = 0$, las variables per cápita se mantienen constantes en el L/P.

(e) CONVERGENCIA

Diferenciando $\Phi(k)/k$ para analizar la velocidad de convergencia, se obtiene que:

$$\Phi(k)/k < 0$$

=> Si tenemos 2 economías con el mismo crecimiento balanceado (CB) pero con distintos niveles iniciales de k_0 (y de producto), la economía más pobre crecerá a una tasa mayor (“convergencia absoluta”). Si las economías tienen distintos CB (por ejemplo, por distintos s), sólo podemos decir que la economía que se encuentra más lejos de su propio CB crecerá más rápido. (“convergencia condicional”)

UNIVERSIDAD DE CHILE
IN41B

(f) PROBLEMAS DEL MODELO

(A) s constante: ¿Por qué algunos países ahorran más que otros?

(B) No explica hecho 5 con idénticas tecnologías: Ejemplo USA - Chile. (nivel de PTF)

iii.- EJERCICIOS

Recuerde que en el modelo de Solow el producto Y , viene dado por:

$$Y = F(K,L) \quad (1)$$

donde estamos ignorando los incrementos de productividad; K y L denotan capital y trabajo; y la función de producción F exhibe retornos constantes de escala, es creciente en cada uno de sus argumentos, tiene retornos decrecientes en cada uno de los argumentos y cumple con las condiciones de Inada. La razón capital-trabajo se denota mediante $k = K/L$ y la forma intensiva de la función de producción viene dada por

$$y = f(k) \quad (2)$$

donde $f(k) = F(K/L, 1)$. La dinámica del capital queda caracterizada por (3):

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

donde s , n y δ denotan la tasa de ahorro, tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital, respectivamente. Las tres tasas son exógenas al modelo. En este problema consideramos una economía pobre (es decir, con menos capital que en estado estacionario) y estudiamos como evolucionan los precios de los factores (salario y retornos al capital) camino al estado estacionario.

a) Suponga que el pago al capital r , viene dado por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ y el salario, w , por

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}. \quad \text{¿Bajo que condiciones es apropiado este supuesto?}$$

Estas expresiones sólo se dan bajo competencia perfecta.

b) Muestre que $r = f'(k)$ y $w = f(k) - kf'(k)$. Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.

Tenemos que $Y = F(K,L) = LF(k,1) = Lf(k)$, por lo tanto derivando con respecto a L tenemos que:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w = f(k) - Lf'(k)\frac{K}{L^2} = f(k) - kf'(k).$$

Por otra parte tenemos que si

$$\max_{\{K\}} F(K,L) - rK - wL$$

Factorizando por L obtenemos que

$$\max_{\{k\}} L(f(k) - rK - w)$$

la condición de primer orden es $f'(k) = r$.

c) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que $rK + wL = F(K,L)$.

UNIVERSIDAD DE CHILE

IN41B

Sabemos que la función de producción tiene retornos constantes a escala, es decir:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

Derivando con respecto a λ obtenemos que

$$F_K K + F_L L = F(K, L)$$

Sabemos que bajo competencia perfecta se tiene que $r = F_K$ y $w = F_L$. Por lo tanto bajo estos supuestos se tiene que:

$$rK + wL = F(K, L)$$

d) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.

Sabemos que el pago del capital esta dado por $r = f(k)$. Para determinar qué sucede con este pago cuando la economía se aproxima al estado estacionario, derivamos esa expresión respecto a k . Esto nos da:

$$\frac{\partial r}{\partial k} = f''(k) < 0$$

es decir a medida que mantenemos fijo el stock de trabajo y aumentamos la cantidad de capital su rentabilidad cae, esto porque cada unidad extra de capital rinde menos. Para determinar qué sucede con el salario, derivamos la expresión del salario y la derivamos respecto a k , esto nos da:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = -k f''(k) > 0$$

e) Suponga que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de cambio del pago al capital $\gamma_r = \dot{r} / r$ y la tasa de cambio del salario $\gamma_w = \dot{w} / w$. Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.

Si la función de producción es Cobb-Douglas entonces $Y = F(K;L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$. Expresando la función en términos per capita se tiene que $y = k^\alpha$. Por lo tanto se tiene que:

$$\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)} = \frac{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\dot{k}}{\alpha k^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{\dot{k}}{k}$$

Por otro lado:

$$\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w} = \frac{-\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}\dot{k}}{(1-\alpha)k^\alpha} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$