



CONTROL 2

Pregunta 1 (50 %)

Considere el problema que debe resolver día a día una empresa de reparto de encomiendas. Esta empresa cada mañana identifica un conjunto, N , de pedidos a distribuir y se los asigna al único repartidor con que cuenta, quien se encarga de entregarlos en sus destinos durante su jornada laboral de 8 horas. Suponga que $j(i) \in M$ corresponde al destino de la encomienda $i \in N$.

Dada la longitud de la jornada laboral del empleado, cabe la posibilidad que durante una día el repartidor no alcance a entregar en sus destinos todos los pedidos asignados por la empresa. En este caso, la empresa debe pagar una indemnización D_i , asociada a dejar para el día siguiente la entrega del pedido i , por cada pedido no entregado.

Por otra parte, la empresa posee una estimación de los tiempos de viaje del repartidor entre su bodega y cada destino, y entre destinos. Llamemos a estos tiempos T_{jk} , donde $j, k \in \{M + \text{bodega}\}$.

1. Considerando que el repartidor no tiene límite de capacidad para transportar pedidos y que su trabajo comienza y termina en la bodega de la empresa, formule un modelo de programación lineal con variables enteras que permita a la empresa decidir qué ruta dar al repartidor y qué pedidos no entregar dentro de la jornada de 8 horas. Lo anterior, con el fin de minimizar los costos de viaje y la penalidad por postergar entregas.

Respuesta:

El modelo de programación lineal es el siguiente:

a) Variables de decisión:

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si viajo desde el cliente } i \text{ al cliente } j. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si visito al cliente } i. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

b) Restricciones:

- Conservación de flujo:

$$\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} \quad \forall i, j.$$

- Entrada y salida a la bodega:

$$\sum_i x_{i0} = 1 \quad \forall i.$$

$$\sum_j x_{0j} = 1 \quad \forall j.$$

- Eliminación de sub-tours:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S, i \neq j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall \quad 2 \leq |S| \leq N - 2$$

- Jornada laboral:

$$\sum_{i,j} T_{ij} \cdot x_{ij} \leq 8 \quad \forall \quad i, j.$$

- Relación entre variables:

$$y_i < \sum_j x_{ij} \quad \forall \quad i.$$

- Naturaleza de las variables:

$$y_i, x_{ij} \in [0, 1] \quad \forall \quad i, j.$$

c) **Función Objetivo:**

$$\text{Min } z = \sum_i D_i \cdot (1 - y_i)$$

2. ¿Cómo cambiaría el modelo de la parte anterior si el repartidor pudiera trabajar horas extras? Considere un costo H por hora extra trabajada.

Respuesta:

Es posible enfrentar el problema como una relajación Lagrangeana de la restricción "Jornada Laboral". El problema queda igual respecto a las restricciones y la nueva función objetivo es:

$$\text{Min } z = \sum_i D_i \cdot (1 - y_i) + H \cdot [\sum_{i,j} T_{ij} \cdot x_{ij} - 8]$$

3. Plantee un modelo de programación dinámica para el problema de la parte (1). Establezca claramente las variables de estado, las variables de decisión, la función de recursión y la(s) condición(es) de borde.

Respuesta:

Modelo de programación dinámica:

- a) Etapas: t -ésima visita a un cliente.

Estados: $E_t = \text{Conjunto de clientes ya visitados (incluyendo al actual)}$.

$Y_t = \text{Cliente visitado en la etapa } t$.

$H_t = \text{Horas disponibles para el resto de los clientes}$.

- b) Variable de decisión:

$X_t = \text{Siguiente cliente a visitar}$.

- c) Recurrencias:

$$E_{t+1} = E_t \cup \{X_t\}$$

$$Y_{t+1} = X_t$$

$$H_{t+1} = H_t - T_{Y_t, X_t}$$

d) Condiciones de borde:

$$E_0 = \emptyset$$

$$H_0 = 8 \text{ hrs.}$$

$$Y_0 = \text{Bodega/inicio}$$

$$V_N = 0$$

e) Función objetivo:

$$V_t(E_t, Y_t, H_t) = \underset{\substack{s.a. \\ X_t \in E_{t+1} \\ H_t - T_{i0} - T_{ij} \geq 0}}{\text{Min}} \left\{ V_{t+1}(E_{t+1}, Y_{t+1}, H_{t+1}), \sum_{j \notin E_t} D_j \right\}$$

Pregunta 2 (30 %)

Suponga que Ud. trabaja como ingeniero en el Departamento de Mantenimiento de una importante empresa, y que durante el último tiempo ha estado muy preocupado por el desempeño de un importante equipo en la principal línea de producción de la empresa. Esta preocupación le ha llevado, junto a su grupo de trabajo, a realizar numerosos estudios respecto a la operación del equipo en cuestión. Estos estudios han arrojado los siguientes resultados:

- La detención no programada del equipo reduce los ingresos de la empresa en 400 US\$.
- Una inspección del equipo no requiere que éste sea detenido y toma 1 hora en promedio. La hora hombre (HH) de inspección se ha valorado en 50 UD\$.
- La reparación del equipo, ante una falla, toma 3 horas en promedio. La hora hombre (HH) de mantención correctiva se ha valorado en 25 US\$.
- Ambas tareas, inspección y reparación, requieren de sólo un mecánico.
- Al realizar una inspección cada dos meses se producen en promedio dos fallas por semana.

Asumiendo que la tasa de fallas es una función inversamente proporcional al número de inspecciones realizadas por unidad de tiempo, se le pide:

1. Determinar el período óptimo entre inspecciones, con el fin de minimizar el costo total asociado.

Respuesta:

Si modificamos el modelo visto en clases para el caso en que una inspección no requiere detener la operación del equipo, se tiene:

$$\begin{aligned} c_g(f) &= c_{f,c} + c_{i,c} + c_{i,i} \\ &= c_f \frac{\lambda(f)}{\mu} + c_{i,r} \frac{\lambda(f)}{\mu} + c_{i,i} \frac{f}{i} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\lambda(f) = \frac{k}{f}$ el número de inspecciones que minimiza el costo total de mantenimiento del equipo es:

$$f^* = \sqrt{k \frac{i}{\mu} \frac{(c_f + c_{i,r})}{c_{i,i}}}$$

Para encontrar el valor de k sabemos que al realizar una inspección cada dos meses se producen en promedio dos fallas por semana. Luego:

$$\lambda(f = \frac{1}{2 \times 60 \times 24}) = \frac{2}{7 \times 24} = \frac{8,2 \times 10^{-6}}{f}$$

Evaluando,

$$f^* = \sqrt{8,2 \times 10^{-6} \times 3 \times \frac{(400 + 25)}{50}} = 0,0145 \quad \left[\frac{insp.}{hr.}\right] \approx 10 \quad \left[\frac{insp.}{mes}\right]$$

2. Calcular el valor de costo total asociado al programa de inspecciones definido en la parte anterior.

Respuesta:

Si la tasa de fallas óptima es

$$\lambda(f^*) = \frac{k}{f^*} = \frac{8,2 \times 10^{-6}}{0,0145} = 5,7 \times 10^{-4} \quad \left[\frac{fallas}{hr.}\right]$$

el costo total asociado al programa de inspecciones definido en la parte anterior es

$$c_g(f^*) = 400 \times 5,7 \times 10^{-4} \times 3 + 25 \times 5,7 \times 10^{-4} \times 3 + 0,0145 \times 1 = 1,45 \quad \left[\frac{US\$}{hr.}\right]$$

3. ¿Cómo cambiaría su respuesta a la parte (1) si en vez de minimizar el costo total asociado sólo se desea maximizar la disponibilidad del equipo?

Respuesta:

Si utilizamos como criterio la disponibilidad del equipo tendríamos:

$$A(f) = 1 - D(f) = 1 - \frac{\lambda(f)}{\mu}$$

luego

$$\frac{\partial A(f)}{\partial f} = -\frac{k}{f^2 \mu} = 0$$

Por lo tanto, se puede concluir que en este caso el número de inspecciones por unidad de tiempo debe ser tan grande como sea posible.

Pregunta 3 (20 %)

Responda brevemente:

1. (1,5 ptos.) Refiérase a la veracidad o falsedad de la siguiente frase: "Ya que las garantías cubren las fallas que puede sufrir un equipo en un período determinado, el comprador de éste no tiene incentivos para realizarle mantención preventiva en este período".

Respuesta:

Falso. Desde el punto de vista del comprador, el invertir en mantenimiento preventivo durante y después de que la garantía ha expirado puede tener un impacto significativo en los costos post-garantía, que son pagados por el comprador. Por lo tanto, es conveniente definir programas de mantenimiento preventivo aún durante el período de garantía.

2. (1,5 ptos.) ¿Qué diferencias existen entre la administración de equipos o máquinas dedicadas a la producción y aquellos que son de emergencia? Explique y ejemplifique claramente.

Respuesta:

La principal diferencia en este caso consiste en que las fallas en equipos de emergencia, por ejemplo extinguidores, sólo son detectables durante inspecciones. Esto debido a que el equipo no está en uso. Si el equipo se deteriora al estar almacenado hay un gran riesgo de que no funcione al momento de ser requerido.

3. (1,5 ptos.) En el contexto del caso expuesto sobre la confección del fixture (calendarización de partidos) para la primera división del fútbol chileno, ¿cuáles son las principales razones que justifican la introducción de modelos matemáticos para generar mejoras en este ámbito?

Respuesta:

Entre las justificaciones es posible mencionar:

▪ JUSTIFICACIÓN ECONÓMICA:

- Aumento en la afluencia de público.
- Aumento del rating de los partidos televisados.
- Reducción de los costos operativos (viajes-estadios, arriendo de canchas).
- Criterios de equidad económica.

▪ JUSTIFICACIÓN DEPORTIVA:

- Criterios de equidad deportiva.

▪ BENEFICIO AL PÚBLICO:

- Partidos importantes en fechas adecuadas.
- Torneos más atractivos.

4. (1,5 ptos.) Considere que Ud. al comienzo del día ha recibido 4 trabajos los cuales deben ser procesados primero por la máquina 1 y luego por la máquina 2. La Tabla 1 muestra los tiempos de proceso asociados.

Tabla 1: Tiempos de Proceso.

Trabajo	Tiempo Operación Máquina 1	Tiempo Operación Máquina 2
A	6	4
B	12	16
C	10	12
D	14	8

- a) Aplique la heurística de Johnson para secuenciar los 4 trabajos.

Respuesta:

La secuencia generada por la heurística de Johnson es: C-B-D-A.

- b) Compare la solución obtenida en la parte anterior, en términos de tiempo total de proceso y tiempo muerto, con las obtenidas mediante asignaciones FIFO y LIFO. Para esto considere que el número de cada trabajo representa el orden en que éste llegó a sus manos.

Respuesta:

La comparación con el secuenciamiento FIFO y LIFO da:

Tabla 2: Tabla Comparativa.

Heurística	Tiempo Proceso	Tiempo Muerto
Johnson	25	9
FIFO	27	14
LIFO	29	16

Bonus:

Sólo para aquellas personas que asistieron a la Charla "Sistema para el Despacho Dinámico de Técnicos" dictada por el Sr. Sebastián Souyris.

4. (1,0 pts.) Según lo expuesto, ¿Qué elementos tecnológicos recientes se podrían incorporar para reducir los costos (tiempos) de transporte y dar un muy buen servicio a los clientes?

Respuesta:

En general, para dar un mejor servicio todo apunta a utilizar tecnología que permita interacción entre una central y vehículos, o entre vehículos, en tiempo real. En este sentido, los GPS apoyados por sistemas de información geográficos parecen ser muy útiles. Lo anterior, junto con recursos computacionales que permitan soportar decisiones en poco tiempo.

5. (1,0 pts.) ¿Por qué no es posible resolver problemas como el descrito utilizando los algoritmos de resolución tradicionales?

Respuesta:

La principal razón es que el tipo de problema resuelto, ruteo con ventanas de tiempo, es de naturaleza NP-Hard, lo que sumado al tamaño del problema (número de variables y restricciones) hace casi imposible su resolución en un tiempo razonable.