



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
UNIVERSIDAD DE CHILE

**Profesores:** Daniel Espinoza G. - Jaime Miranda P.

**Semestre:** Primavera 2006

**Fecha:** 21 de noviembre de 2006

# IN47B Ingeniería de Operaciones

## Pauta Examen

### Problema 1 (33 %)

Considere el problema de producción enfrentado por una compañía (como Coca Cola) que enfrenta una demanda fuertemente estacional. Suponga que esta empresa produce  $K$  productos ( $k = 1, \dots, K$ ) y que conoce la demanda semanal para cada producto para un período anual  $\{d_{tk}\}_{t=1, k \in K}^{53}$  (las unidades son camionadas).

Considere además que los costos marginales de producción son crecientes, en intervalos discretos,  $\{c_{kp}\}_{k \in K, p=1, \dots, 6}$ , donde  $c_{kp} < c_{k(p+1)}$  y los intervalos están dados por  $l_{kp}$ , donde  $l_{k1} = 0$ ,  $l_{kp} < l_{k(p+1)}$  y  $l_{k7} = \infty$ .

La compañía tiene una bodega con capacidad  $C$ , suponga que los costos de bodegaje tienen una función de costo con costos marginales crecientes, en intervalos discretos, dados por  $\{b_p\}_{p=1, \dots, 4}$  y los intervalos por  $\{m_p\}$  donde  $m_1 = 0$  y  $m_5 = C$ .

Suponga que los tiempos de transporte de fábrica a bodega, de bodega a clientes y de fábrica a clientes es de una semana y, que los costos de transporte por camionada son iguales a  $ct$ .

Finalmente, suponga que existe un costo unitario asociado a ventas perdidas igual a  $P$ .

Con esta información responda las siguientes preguntas:

1. **(3 pts.)** Proponga un modelo lineal (red espacio-temporal) para el problema de planificación de bodegaje, transporte y producción para esta compañía.

Para modelar este problema definimos tres conjunto de nodos,  $P_t$  que es la planta de producción en el período  $t$ ,  $B_t$  que representa la bodega en el período  $t$ , y  $D_t$  que representan los retail (o donde se realizan las ventas) en el período  $t$ .

Por cada producto  $k \in K$  e intervalo de costos de producción definimos un arco  $p_{tkp}$  entrante a  $P_t$  con capacidad  $\widetilde{l}_{kp} = l_{kp} - l_{k(p-1)}$  y costo  $c_{kp}$ . Por cada intervalo de costos de bodegaje definimos un arco  $b_{tp}$  con terminales  $(B_{t-1}, B_t)$ , costo  $b_p$  y capacidad  $\widetilde{m}_p = m_p - m_{p-1}$ .

Por cada producto  $k \in K$  y por cada punto de demanda definimos un arco  $s_{tk}$  saliente de  $D_t$  con costo  $P$ .

Además, definimos arcos de transporte entre planta, bodega y clientes de la siguiente forma:  $pb_t = (P_t, B_{t+1})$ ,  $pd_t = (P_t, D_{t+1})$  y  $bd_t = (B_t, D_{t+1})$ , todos con costo  $ct$ .

Debido a que necesitamos llevar la cuenta del flujo de cada producto, definimos variables  $pb_{tk}, pd_{tk}, bd_{tk}, b_{tpk}$  que son las versiones por producto de las variables definidas anteriormente.

Con esto el problema puede escribirse del siguiente modo:

- Costo:  $\sum_{tkp} p_{tkp} c_{kp} + ct \sum_t (pb_t + pd_t + bd_t) + \sum_{tp} b_{tp} b_p + P \sum_{tk} s_{tk}$ .
- Agregación de productos:  $\sum_{k \in K} b_{tpk} = b_{tp}$ ,  $\sum_{k \in K} pb_{tk} = pb_t$ ,  $\sum_{k \in K} pd_{tk} = pd_t$ ,  $\sum_{k \in K} bd_{tk} = bd_t$ .
- Conservación de flujo en  $P_t$ :  $\sum_{p=1}^6 p_{tkp} = pb_{tk} + pd_{tk}$ ,  $\forall t, k$ .
- Conservación de flujo en  $B_t$ :  $\sum_{p=1}^4 b_{(t-1)pk} + pb_{(t-1)k} = \sum_{p=1}^4 b_{tpk} + pd_{tk}$ ,  $\forall t, k$ .
- Conservación de flujo en  $D_t$ :  $pd_{(t-1)k} + bd_{(t-1)k} + s_{tk} = D_{tk}$ ,  $\forall t, k$ .
- Capacidad global en la bodega:  $\sum_p b_{tp} \leq C$ ,  $\forall t$ .

Note que todas las variables son positivas, y que las variables  $b_{tp}$  y  $p_{tkp}$  están acotadas superiormente por  $\widetilde{m}_p$  y por  $\widetilde{l}_{kp}$  respectivamente.

2. **(1 pto.)** ¿Cómo modificaría el modelo para acomodar el hecho que bodega tiene siempre una merma del  $p\%$  de las existencias?

Note que basta cambiar la restricción  $\sum_{p=1}^4 b_{(t-1)pk} + pb_{(t-1)k} = \sum_{p=1}^4 b_{tpk} +$

$$pd_{tk}, \quad \forall t, k \text{ a } \sum_{p=1}^4 (1-p)b_{(t-1)pk} + pb_{(t-1)k} = \sum_{p=1}^4 b_{tpk} + pd_{tk}, \quad \forall t, k$$

3. **(1 pto.)** Suponga ahora que la empresa posee sólo  $T$  camiones propios y que cada camión puede realizar a lo mas  $a$  viajes semanales y, que puede arrendar camiones a un costo fijo de  $r_T$  cada camión semanalmente. ¿Cómo modificaría su modelo para considerar estos cambios?

Note que  $pb_t + pd_t + bd_t$  es el número de viajes semanales a hacer en el modelo, entonces, basta definir una variable entera  $v_t$  que es el número de camiones a usar cada semana,  $vp_t$  el número de camiones propios a usar, y  $va_t$  el número de vehículos arrendados a usar. Claramente  $v_t, vp_t, va_t \geq 0$ , y  $vp_t \leq T$ , además  $v_t \in \mathbb{N}$ , y se tiene la relación  $v_t \cdot a \geq pb_t + pd_t + bd_t$ , y cabria que agregar a la función objetivo el término  $r_T \sum_t va_t$ .

4. **(1 pto.)** Suponga además de la estacionalidad en la demanda, hay un cierto factor de incertidumbre en ella, pero por otro lado, mientras más cercanos estamos al momento de realizarse la demanda, más exactos son nuestros pronósticos. ¿Cómo usaría su modelo en esta situación? ¿Qué cambios le haría a la función de costo?

Típicamente, estos modelos se resuelven cada vez que mas información es incorporada al sistema (cambio de costos variables, estimaciones de demanda, etc.). Otra forma de reflejar la calidad de la información, típicamente se utiliza un factor de descuento a las decisiones en el futuro, la lógica es que dado que confiamos menos en las estimaciones mas alejadas del presente, nuestras decisiones deberían depender en menor forma de esos datos.

5. **(bono 1 pto.)** ¿Cómo modificaría el modelo si los productos tienen una vida útil de a lo más cinco períodos? (Suponga que los costos de bodegaje en este caso son lineales en la cantidad en stock).

Para esto basta descomponer las variables  $b_{tkp}$  según edad, es decir, definir  $b_{tkpa}$  como la cantidad de stock de producto  $k$  en el tiempo  $t$  en el tramo  $p$  de costo de bodegaje de una edad  $a$ , y agregar las relaciones

$$\sum_{a=1}^5 b_{tkpa} = b_{tpk}, \quad b_{tkpa} \leq b_{tkp(a-1)}. \quad \text{El resto del modelo seguiría igual.}$$

## Problema 2 (33 %)

1. **(3 pts.)** Este problema tiene como objetivo minimizar la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^N h_j(C_j) \quad (1)$$

Es posible separar el problema en dos partes, primero secuenciar los trabajos  $k \in K$  y luego los otros. Ambos casos se resuelven de la misma manera.

Sin perder generalidad, supongamos que deseamos secuenciar los trabajos  $k \in K$ . Entonces la función de costos para las primeras  $K$  trabajos estará dado por:

$$V(K) = \sum_{j \in K} h_j(C_j) \quad (2)$$

De esta forma, la condición inicial es:

$$V\{j\} = h_j(T_j) \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3)$$

La relación recursiva es:

$$V(K) = \min_{j \in K} (V(K - \{j\}) + h_j(\sum_{j \in K} T_j)) \quad (4)$$

La función de beneficio acumulado será:

$$V(\{1, \dots, N\}) \quad (5)$$

2. **(3 pts.)** Para estimar el secuenciamiento se utilizará un modelamiento forward. De esta forma, en la primera iteración se debe calcular la función de beneficios de la siguiente forma:

$$V(1) = 4 + (4)^2 = 30 \quad (6)$$

$$V(2) = 30 \quad (7)$$

$$V(3) = 48 \quad (8)$$

La segunda iteración considera todos los conjuntos que tienen 2 trabajos. Por ejemplo, el beneficio de realizar los trabajos 1 y 2 es el mínimo valor entre hacer primero el trabajo 1 y después el 2 o el de realizar primero el trabajo 2 y luego el 1, es decir:

$$\begin{aligned} V(1, 2) &= \text{Min}\{1 - 2, (2 - 1)\} \\ V(1, 2) &= \text{Min}\{V(1) + h_2(T_1 + T_2), V(2) + h_1(T_2 + T_1)\} \\ V(1, 2) &= \text{Min}\{20 + 346, 30 + 56\} \\ V(1, 2) &= 86 \end{aligned} \quad (9)$$

De la misma manera es posible calcular:

$$\begin{aligned} V(1, 3) &= 100 \\ V(2, 3) &= 102 \end{aligned} \quad (10)$$

Entonces, los trabajos 1 y 2 preceden al trabajo 3 y el trabajo 2 debe procesarse primero que el trabajo 1.

La última iteración considera que se debe realizar los 3 trabajos:

$$\begin{aligned} V(1, 2, 3) &= \text{mín}\{V(1, 2) + h_3(T_1 + T_2 + T_3), V(2, 3) + \\ &\quad h_1(T_1 + T_2 + T_3), V(1, 3) + h_2(T_1 + T_2 + T_3)\} \\ V(1, 2, 3) &= \text{mín}\{86 + 104, 102 + 182, 100 + 2200\} \\ V(1, 2, 3) &= 190 \end{aligned} \quad (11)$$

Finalmente, los trabajos 1 y 2 van primero y el 3 al último.

**La secuencia final de los trabajos es 2-1-3**

3. **(bono 1 pto.)** Si se consideran que el tamaño del conjunto  $K$  es igual a  $l$  y que el número total de trabajos es  $N$ , El número de evaluaciones son:

$$\left( \sum_{i=1}^l i! \binom{l}{i} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{N-l} i! \binom{N-l}{i} \right)$$

## Problema 3 (33 %)

Responda las siguientes preguntas:

1. (1.5 pts.) Las etapas son:
  - a) **Formulacin del problema:** En esta etapa se deben definir los objetivos, alcances y resultados esperados del estudio.
  - b) **Recoleccin de los dato e informacin de entrada:** En esta etapa se den definir las variables que servirn de entrada para el modelo, medirlas en forma emprica y ajustar las distribuciones tericas para poder simularlas mediante algntipo de test de bondad de ajuste.
  - c) **Construccin del modelo computacional:** En esta etapa se construye el modelo computacional sobre la base de un modelo conceptual. Ac se deben diseaar las relaciones lgicas y “trucos” de modelacin para representar el “modelo real”.
  - d) **Verificacin del modelo:** En esta etapa se debe responder a la pregunta: El modelo computacional hace lo qu realmente pensamos?. En esta etapa se debe utilizar diferentes controles como contadores, control de las mediciones a travs de sistemas modulares y las trayectorias lgicas que gobiernan las interacciones entre los distintos procesos mediante por ejemplo animaciones.
  - e) **Validacin del modelo:** En esta etapa se responde a la pregunta: El modelo de simulacin representa la realidad del sistema?. Ac se deben construir indicadores para evaluar el desempeo del sistema y cuantificar las potenciales mejoras.
2. (1.5 pts.) Las ventajas de un sistema centralizado son:
  - a) Disminuyen los stocks de seguridad.
  - b) Disminuyen los costos fijos por las economías de escala.
  - c) Disminuyen los costos de transporte hacia a bodegas intermedias.Las desventajas son las siguientes:
  - a) Disminuye la calidad del servicio al aumentar los tiempos de entrega.
  - b) Aumentan los costos de transporte hacia los clientes.
3. (1 pto.) Explique brevemente en qué consiste el efecto látigo.

El efecto látigo se refiere a la acumulación de variabilidad en la demanda observada a medida que incrementa el número de actores en la cadena logística. Típicamente, a mas actores, más aumenta la variabilidad en la demanda observada. Si se trabaja en un esquema cooperativo, la

variabilidad puede crecer linealmente con el número de actores. Si se los actores trabajan sin compartir información, la variabilidad puede crecer multiplicativa-mente según el número de actores.

4. **(1 pto.)** Describa brevemente en qué consiste la estrategia de VMI. VMI se refiere a la estrategia de inventario donde el productor maneja completamente el inventario de sus clientes (o distribuidores) finales, y donde además este tiene conocimiento detallado de la demanda real, así como de cualquier tipo de oferta adicional que el distribuidor final pueda realizar.

5. **(1 pto.)** ¿Por qué se justifica la maximización de valor esperado en el problema de venta de asientos en la industria aérea? ¿En qué casos maximización de valor esperado no se debería aplicar?

Maximización de valor esperado es utilizado en el caso de las líneas aéreas por que las decisiones se repiten muchas veces sobre cada vuelo, es decir, son decisiones que se repiten varios cientos de veces (si no miles) durante el año. Por lo que valor esperado tiene todo el sentido del mundo.

Sin embargo, en situaciones donde el número de veces que una decisión se tomara es una vez o sólo unas pocas veces, los costos de equivocarse deben ser tomados en cuenta, y en esos caso maximización de valor esperado no debería usarse.

## Bonos

1. **(0.25 pts.)** Las justificaciones son las siguientes:
- JUSTIFICACIÓN ECONÓMICA
    - Aumento en la afluencia de público.
    - Aumento del rating de los partidos televisados.
    - Reducción de los costos operativos (viajes-estadias, arriendo de canchas).
    - Criterios de equidad económica.
  - JUSTIFICACIÓN DEPORTIVA
    - Criterios de equidad deportiva.
  - BENEFICIO AL PÚBLICO
    - Partidos importantes en fechas adecuadas.
    - Torneos más atractivos.
2. **(0.25 pts.)** La función objetivo era la trata de calendarizar los partidos

entre los equipos del mismo grupo hacia el final del campeonato.

$$z = \sum_i \sum_{j \neq i \vee j \text{ en el grupo de } i} \sum_k k \cdot x_{ijk}$$