

MA26B: Matemáticas Aplicadas
Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Omar Larré, Tomás Spencer, Leonardo Zepeda

1. Tarea 1

1.1. Problema 1:

Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 tal que:

$$\|\vec{F}(\vec{r})\| \leq \frac{1}{\|\vec{r}\|^b + 1} \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$$

con $b > 2$. Demuestre que:

$$\int \int \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(\vec{F}) = 0$$

Indicación : Escriba el Teorema de la divergencia para el campo \vec{F} en la bola de centro en el origen, y radio R y acote adecuadamente el módulo de la integral de superficie, haga luego el límite de $R \longrightarrow \infty$ y concluya.

1.2. Problema 2

- a) Dadas dos funciones f y g de clase C^2 definidas en $R \subseteq \mathbb{R}^3$ con valores en \mathbb{R} , demuestre la identidad:

$$\operatorname{div}(g \nabla f) = g \Delta f + \nabla g \cdot \nabla f$$

donde $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ que llamaremos Laplaciano.

- b) Consideremos una región $R \subseteq \mathbb{R}^3$ en cerrada por una superficie suave S y ocupada por dos gases cuyas distribuciones de temperatura están dadas por las funciones $u(x, y, z, t)$ y $v(x, y, z, t)$ de clase C^2 (Donde $u(x, y, z, t)$ es la temperatura de la partícula del primer gas que en el instante t , ocupa la posición (x, y, z) , lo cual es análogo para $v(x, y, z, t)$)

Se sabe que las funciones de distribución de temperatura satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - k(u - v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v - l(v - u) \end{aligned}$$

donde k y l son constantes estrictamente positivas.

Se sabe también que sobre la superficie S se tiene:

$$\nabla u \cdot \hat{n} = \nabla v \cdot \hat{n} = 0$$

donde \hat{n} es la normal exterior a la superficie S . También es conocido que en $t = 0$ la temperatura de cada gas es constante en toda la región R . Denote por u_0 la temperatura del primer gas en $t = 0$ y por v_0 la del segundo en el mismo instante.

1. Si definimos las siguientes funciones de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$U(t) = \int \int \int_R u(x, y, z, t) dx dy dz \quad V(t) = \int \int \int_R v(x, y, z, t) dx dy dz$$

Demuestre que U y V cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dU}{dt} = -k[U(t) - V(t)] \quad \frac{dV}{dt} = -l[V(t) - U(t)]$$

Indicación: Use la regla de derivación de Leibnitz y la definición de Laplaciano.

2. Demuestre que $lU(t) + kV(t) = (lu_0 + kv_0)vol(R), \forall t > 0$.

Indicación : Primero demuestre que es constante, manipulando las ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente, y luego evalúe la condición inicial.

3. Demuestre que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \frac{lu_0 + kv_0}{k + l} vol(R)$$

Indicación : A partir de 1), encuentre una ecuación diferencial para $U(t) - V(t)$, resuélvala, y llegue a $U(t) - V(t) \rightarrow 0$, y aplique esto a lo obtenido en 2), luego concluya.

4. Asuma ahora que las distribuciones de temperatura son independientes del tiempo. Si \bar{u} y \bar{v} son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} \Delta u &= k(u - v) \\ \Delta v &= l(v - u) \end{aligned}$$

demuestre que $w \equiv \bar{u} - \bar{v} = 0$ en R . Para esto demuestre que $\Delta w = (k + l)w$ en R y que $\nabla w \cdot \hat{n} = 0$ en S . Para concluir que $w \equiv 0$, use la identidad demostrada en la parte a) y el Teorema de la Divergencia.

1.3. Problema 3

Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ a través de la cara curva de cuarto de cono, ubicado en el octante positivo, con base $B = (x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a, z = 0$ y vértice en $(0, 0, h)$.

Indicación : Calcule $div(\vec{F})$

1.4. Problema 4

Sea $\vec{v}(x, y, z) = r^2(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, luego calcule directamente y mediante el Teorema de la Divergencia:

$$\int_S \vec{v} \cdot \hat{n}$$

donde S es la superficie de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1.5. Problema 5

Sea $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ un campo vectorial suave en \mathbb{R}^3 , que se anula fuera de $\bar{B}_1(0)$ la bola unitaria (cerrada) centrada en el origen y que satisface $\text{div}(\vec{J}) = 0$.

a) Pruebe la identidad:

$$\text{div}(f \cdot \vec{J}) = (\nabla f) \cdot \vec{J} + f \text{div}(\vec{J})$$

b) Para $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suave, y R una vecindad de $\bar{B}_1(0)$, pruebe que:

$$\int_{\bar{B}_1(0)} (\nabla f) \cdot \vec{J} dx dy dz = 0$$

Indicación : Pruebe que \vec{J} sobre $\partial \bar{B}_1(0)$ es igual a cero (recuerde que es suave i.e. continua), y utilice la parte a).

c) Pruebe que:

$$\int_{\bar{B}_1(0)} J_1 dx dy dz = 0$$

Indicación : Aplique la parte anterior con una f adecuada.

1.6. Problema 6

Sean T y Ω dos volúmenes simplemente conexos, tales que $T \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea S la superficie suave por pedazos que define a T . Se considera el siguiente problema:

Encontrar $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ tal que:

$$(P) = \begin{cases} \Delta u = f & \text{en } T \\ \nabla u \cdot \hat{n} = g & \text{sobre } S \end{cases}$$

donde f y g pertenecen a $C(\Omega; \mathbb{R})$.

a) Demuestre que una solución u de (P) satisface:

$$\int_T \nabla u \cdot \nabla v d\tau = \int_S v g d\sigma - \int_T v f d\tau \quad \forall v \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$$

Indicacion : Utilice el Teorema de la Divergencia para la función $v\nabla u$ donde u es la solución a (P) y $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

b) Considere ahora el siguiente problema:

Encontrar $\tilde{u} \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ tal que:

$$(\tilde{P}) = \begin{cases} \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{en } T \\ \nabla \tilde{u} \cdot \hat{n} = \tilde{g} & \text{sobre } S \end{cases}$$

donde \tilde{f} y \tilde{g} pertenecen a $C(\Omega; \mathbb{R})$. Muestre que si u es una solución de (P) y \tilde{u} es una solución de (\tilde{P}) (note que los problemas son iguales, a excepción de las funciones que sirven de parámetro, y que u es de clase C^1 y \tilde{u} es de clase C^2), entonces

$$\int_S (\tilde{u}g - u\tilde{g})d\sigma = \int_T (\tilde{u}f - u\tilde{f})d\tau$$

Indicación : Usar la parte anterior.

c) Muestre que la solución u del problema

$$(P) = \begin{cases} \Delta u = \frac{1}{x} & \text{en } T \\ \nabla u \cdot \hat{n} = 0 & \text{sobre } S \end{cases}$$

satisface

$$\int_T \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = -\text{vol}(T)$$

donde en este caso T es un volumen que no intersecta al plano YZ (i.e. $x = 0$) y $\text{vol}(T)$ es su volumen.

18 de Agosto de 2006