MA26B: Matemáticas Aplicadas
Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Omar Larré, Tomás Spencer, Leonardo Zepeda

Calcule la integral de flujo $\displaystyle\int\int_{\Sigma}\nabla\phi d\vec{s}$ si Σ es el hemiferio superior del casquete elipsiodal $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ orientado según la normal interior, y $\phi(x,y,z)=(x+1)^2+2(y-1)^2+z^2$

Solución :

En primer lugar necesitamos parametrizar el casquete para el cual usamos coordenadas elipsoidales, i.e.

$$\begin{cases} x = a\sin\phi\cos\theta & \theta\in[0,2\pi] \\ y = b\sin\phi\cos\theta & \phi\in[0,\pi/2] \\ z = c\cos\phi \end{cases}$$

luego obtenemos que : $\vec{r}(\theta,\phi)=a\sin\phi\cos\theta\hat{i}+b\sin\phi\cos\theta\hat{j}+c\cos\phi\hat{k}$

Ahora calculamos los vectores tangentes a la curva :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=-a\sin\phi\cos\theta\hat{i}+b\sin\phi\cos\theta\hat{j}$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}=-a\cos\phi\cos\theta\hat{i}+b\cos\phi\sin\theta\hat{j}-c\sin\phi\hat{k}$$

entonces haciendo el cambio la integral de superfice obtenemos:

$$\int\int_{\Sigma}\nabla\phi d\vec{s}=\int\int_{\Sigma}\nabla\phi(\vec{r}(\theta,\phi))\cdot\frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right\|}d\theta d\phi\cdot\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right\|$$

Acá podemos simplificar, las expresiones con los módulos, ahora debemos calcular $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}$

Para lo cual:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}=-a\sin\phi\cos\theta\hat{i}+b\sin\phi\cos\theta\hat{j}\times-a\cos\phi\cos\theta\hat{i}+b\cos\phi\sin\theta\hat{j}-c\sin\phi\hat{k}$$

luego haciendo los productos correspondientes obtenemos:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}=-[ab\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta+ab\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta]\hat{k}-ac\sin^2\phi\operatorname{sen}\theta\hat{j}-bc\sin^2\phi\cos\theta\hat{i}$$

Ahora falta ver si $\dfrac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right\|}$ es un vector normal interior?

Para lo cual lo evaluamos en $\theta = 0 \wedge \phi = \pi/2$ con lo cual obtenemos que si es interior!

Ahora calculemos el gradiente de ϕ

$\nabla\phi(x,y,z) = (2(x+1), 4(y-1), 2z) = 2(x-1, 2(y-1), z)$

y expresamos este resultados en coordenadas elipsoidales:

$\nabla\phi(\vec{r}(\theta,\phi) = 2(a\sin\phi\cos\theta + 1, 2(b\sin\phi\sin\theta - 1), c\cos\phi)$

Entonces reemplazando en la Integral de Superficie:

$$\int\int_{\Sigma}\nabla\phi d\vec{s} =$$

$$2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(a\sin\phi\cos\theta{+}1, 2(b\sin\phi\sin\theta{-}1), c\cos\phi)\cdot(bc\sin^2\phi\cos\theta, ac\sin^2\phi\operatorname{sen}\theta, ab\sin\phi\cos\phi)d\theta d\phi =$$

$$-2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(abc\sin^3\phi\cos^2\theta{+}bc\sin^2\phi\cos\theta{+}2ac\sin^2\pi\sin\theta(b\sin\phi\sin\theta{-}1){+}abc\sin^3\phi\cos^2\phi)d\theta d\phi =$$

$$-2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(abc\sin^3\phi\cos^2\theta + 2abc\sin^3\pi\sin^2\theta + abc\sin^3\phi\cos^2\phi)d\theta d\phi =$$

$$-2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(abc\sin^3\phi + abc\sin^3\pi\sin^2\theta + abc\sin^3\phi\cos^2\phi)d\theta d\phi =$$

$$-2abc\pi[2\int_0^{\pi/2}sin^3\phi d\phi - \int_0^{\pi/2}sin^3\phi d\phi - 2\int_0^{\pi/2}\cos^2\phi\sin\phi d\phi =$$

$$-6abc\pi\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^3\phi d\phi}_{=2/3} + \frac{4}{3}abc\pi = -\frac{16}{3}abc\pi$$

Bueno cualquier errata, la ponen en el foro, y veré si después le pego algún dibujo pero por mientras = les debería servir eso. Buena suerte.