Departamento de Ingeniería Matemática
MA26B-03: Matemáticas Aplicadas
Profesor: Pierre Guiraud
Auxiliares: Raul Aliaga, Maximiliano Rojo

Clase Auxiliar 5 (Viernes 24/09/04)
Integrales Complejas.

1. $\int_\gamma |z|\bar{z}dz$ con γ la frontera del semicírculo $\{\ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, Imz \geq 0\}$.

   Solución:
   La curva se compone de la semicircunferencia de radio 1 que se parametriza mediante $\gamma_1(t) = e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, y del segmento $[-1, 1]$ que se parametriza poiendo $\gamma_2(t) = t$ con $t \in [-1, 1]$ (al parecer, este segmento en la clase "presencial" no fue considerado, pero no importa, pues da una integral de una función impar en un intervalo simetrico respecto al origen, o sea da cero). Luego,

$$\int_\gamma |z|\bar{z}dz = \int_0^\pi e^{-it}ie^{it}dt + \int_{-1}^1 |t|tdt = i\int_0^\pi = \pi i$$

2. $\int_\gamma |z|^2dz$ donde γ es el cuadrado de vértices $0, 1, 1 + i$ e i.

   Solución:
   Los cuatro "lados" de γ pueden paramtrizarse poniendo:

$$\gamma_1(t) = t, \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = 1 + it, \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = 1 + i(1 - t), \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_4(t) = (1 - t)i, \qquad t \in [0, 1]$$

   Por lo tanto:

$$\int_\gamma |z|^2d = \int_0^1 t^2dt + \int_0^1 (1 + t^2)idt - \int_0^1 (i + t^2)dt - \int_0^1 t^2idt$$

$$= (i - 1)\int_0^1 dt = i - 1$$

3. $\int_\gamma \frac{|z|}{|1-z|^2}|dz|$ donde γ es la circunferencia de radio r ($0 < r < 1$) y centro el origen.
Indicación: Pruebe previamente que si $0 \leq r < R$, se tiene:

$$\frac{1}{r^2 - 2rR\cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n \cos(nt))$$

y use que $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge uniformemente a $\frac{r}{1-r}$ con $|r| < 1$ ($r \in \mathbb{C}$).

Solución:
Probemos en primer lugar que si $0 \leq r < R$,

$$\frac{1}{r^2 - 2rR\cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n \cos(nt))$$

siendo la convergencia de la serie uniforme en $t \in [0, 2\pi]$.
En efecto, observemos primero que

$$\frac{1}{R^2 - 2rR\cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - rR(e^{it} + e^{-it}) + r^2} = \frac{1}{(R - re^{it})(R - re^{-it})}$$

Pero si $|z| = r$, por fracciones parciales, obtenemos que :

$$\frac{1}{(R - z)(R - \bar{z})} = \frac{z}{(R - z)(Rz - r^2)} = \frac{1}{R^2 - r^2}(\frac{R}{R - z} + \frac{r^2}{Rz - r^2})$$

por lo que poniendo $z = re^{it}$ y usando la segunda parte de la indicación, se tiene que:

$$\frac{1}{r^2 - 2rR\cos t + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2}(\frac{1}{1 - (\frac{r}{R})e^{it}} + \frac{(\frac{r}{R})e^{-it}}{1 - (\frac{r}{R})e^{-it}})$$

$$= \frac{1}{R^2 - r^2}(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{R})^n e^{int} + (\frac{r}{R})e^{-it}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{R})^n e^{-int})$$

$$= \frac{1}{R^2 - r^2}(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{R})^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n e^{-int})$$

$$= \frac{1}{R^2 - r^2}(1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{R})^n \cos(nt)).$$

uniformemente en $t \in [0, 2\pi]$.
Por tanto, **puesto que la convergencia uniforme permite intercambiar los signos de integral y de suma**, usando la indicación con $R = 1$, tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{|z|}{|1-z|^2}|dz| = \int_0^{2\pi} \frac{r}{|1-re^{it}|^2} r dt$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-r\cos(t))^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(t)} = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$

$$= \frac{r^2}{1-r^2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nt))dt$$

$$= \frac{r^2}{1-r^2}[t + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2\pi r^2}{1-r^2}$$

4. Calcule $\int_\gamma \bar{z} dz$, siendo γ:

   - $\gamma(t) = t^2 + it$ con $0 \leq t \leq 2$

     Solución:
     Por definición, tenemos que:

     $$\int_\gamma \bar{z} dz = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i)dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)dt$$

     $$= [\frac{t^4}{2} - i\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=2} = 10 - \frac{8}{3}i.$$

   - la línea poligonal que conecta los puntos 0 con $2i$, y $2i$ con $4 + 2i$.

     Solución:
     Nuevamente por definición tenemos que:

     $$\int_\gamma \bar{z} dz = \int_0^2 (-it)idt + \int_0^4 (t - 2i)dt$$

     $$= [\frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=2} + [\frac{t^2}{2} - 2it]_{t=0}^{t=4} = 10 - 8i.$$

5. Calcule $\int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}^2}$, siendo γ:

- $\gamma(t) = e^{i(\pi - t)}$ con $0 \leq t \leq \pi$

  Solución:
  Por definición:

  $$\int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}^2} = \int_0^\pi \frac{-ie^{i(\pi-t)}}{e^{-2i(\pi-t)}} dt = -i \int_0^\pi e^{3i(\pi-t)} dt = \frac{1}{3}[e^{3i(\pi-t)}]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{3}$$

- $\gamma(t) = e^{it}$ con $\pi \leq t \leq 2\pi$

  Solución:
  pues adivina... por definición:

  $$\int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}^2} = \int_\pi^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{-2it}} dt = i \int_\pi^{2\pi} e^{3it} dt = \frac{1}{3}[e^{3it}]_{t=\pi}^{t=2\pi} = \frac{2}{3}$$