Auxiliar 01-10 Maximiliano Rojo B

MA26B - Prof. P. Guimaud

Definiciones:

- Teorema de Cauchy-Goursat

① Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{para todo camino cerrado y simple } \Gamma \text{ contenido en } \Omega$$

② Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f: \Omega \setminus \{p_1, p_2, \dots p_n\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en $\Omega \setminus \{p_1 \dots p_n\}$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario. Sea D la región encerrada por Γ. Supongamos que $\{p_1, \dots p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escogemos $\varepsilon > 0$ tal que $\forall j = 1 - n$ $\overline{D}(p_j, \varepsilon) \subseteq D$ y además $\overline{D}(p_j, \varepsilon) \cap \overline{D}(p_k, \varepsilon) \neq \emptyset$ si $k \neq j$. Sea $\gamma_j(t) = p_j + e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j^+} f(z)\,dz$$

- Integral de Cauchy

Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$, $r < \emptyset$ y $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$\forall z_0 \in D(p,r), \qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

y para $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$; $\forall z \in D(p,r)$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}}\,dw$$

- Teorema de los residuos de Cauchy

El residuo de una función f en un punto p se denota $\mathrm{res}(f,p)$ y se define por

$$\mathrm{res}(f,p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} f(z)\,dz$$

o bien

$$\operatorname{res}(f,p) = \frac{1}{(m-1)!} \left.\frac{d^{m-1} g}{dz^{m-1}}\right|_p$$

donde

$$g(z) = \begin{cases} (z-p)^m f(z) & \text{si } z \neq p \\ L_m = \lim_{z \to p} (z-p)^m f(z) & \text{si } z = p \end{cases}$$

lo que nos lleva al Teorema:

Sea f en Ω abierto y P el conjunto de Polos de f. Dado Γ camino cerrado simple que no pase por P, es decir $\Gamma \cap P = \emptyset$, que encierra $D \subseteq \Omega$, entonces $D \cap P$ es finito (o vacío) $= \{p_1 - p_n\}$

$\Rightarrow$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}(f, p_j)$$

Problemas.

P1) Si definimos los operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de C-R ssi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

b) Si $f \in H(\Omega)$ (f holomorfa en Ω), muestre que $\forall z_0 \in \Omega$
$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

c) Explicite en términos de u y v a que corresponde la ecuación
$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$

d) Dada una función $f = u + iv$ con u y $v \in \mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f mediante $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, y si $\Delta f = 0$ decimos que f es armónica en Ω. Deduzca que $f \in H(\Omega)$ $\Rightarrow$ f armónica en Ω. Pruebe que si $f \in H(\Omega) \Rightarrow f(z)$ y $z f(z)$ son armónicos en Ω

Sol)

a) Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + i\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right)$$

y las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos dicen que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Luego, si f cumple C-R, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (y viceversa)

b) $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

pero $f \in H(\Omega) \Leftrightarrow$ cumple C-R $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'$$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$

Tenemos $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\omega + i\gamma\right]$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} + i\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

(pero u y $v \in C^2$). $= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ corresponde al laplaciano $\Delta f = 0$

$(\Delta F = \Delta u + i\Delta v)$

d) Si f es $H(\Omega)$

$\Rightarrow$ cumple C-R

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad / \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \quad / \dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$ si u y v son C^2

$\Rightarrow \Delta u = 0$

Análogo para Δv, $\Delta v = 0$

$\Rightarrow \Delta f = \Delta u + i\Delta v = 0 \Rightarrow f$ es armónica

Veamos ahora que

$$g(z) = zf(z) = (x+iy)\,f(x+iy) = xu - yv + i(xv + yu)$$

$\Rightarrow \Delta g = \Delta(xu - yv) + i\Delta(xv + yu)$

- $\Delta(xu - yv) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xu - yv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xu - yv)$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(u + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial y} - v - y\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

$= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + x\Delta u - y\Delta v$

pero $f \in H(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\Delta u = 0 \wedge \Delta v = 0$

$\Rightarrow \Delta(xu - yv) = 0$

De manera equivalente, $\Delta(xv + yu) = 0$
por lo que $g(z) = z f(z)$ es armónica.

P2) Det. el radio de convergencia de las series siguientes.

i) $\sum (\log(n))^2 x^n$ ii) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$

Sol)

1) Vimos que utilizando el criterio de la raíz enésima la cosa se complica.
Mejor usemos el del cuociente, con

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Es decir

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \frac{(\log n+1)^2}{(\log n)^2} = \left[\limsup_{n\to\infty} \frac{\log n+1}{\log n}\right]^2$$

$$\underset{\text{l'hoppital}}{=} \left[\limsup_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{1/n}\right]^2 = \left[\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right]^2$$

$$= \left[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n}\right]^2 = 1 \Rightarrow R = 1$$

ii) Ocupando

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left[\limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

pero $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$ cuando $n\to\infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = e^{-1} \Rightarrow R = e$$

P3) Considere el borde del cuadrado C_N de vértices:

$\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i)$, $\left(N+\frac{1}{2}\right)(1-i)$, $\left(N+\frac{1}{2}\right)(1+i)$

y $\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1+i)$ con $N \in \mathbb{N}$

i) Sea $f(z) = \dfrac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$. Indique donde f es holomorfa, encuentre sus polos y determine sus órdenes correspondientes

Sol)

$$f(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$$. Buscamos donde $\sin(\pi z) = 0$

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{i\pi z} = e^{-i\pi z}$$

$$\Rightarrow |e^{2i\pi z}| = 1 \quad . \quad \text{Si } z = x+iy$$

$$\Rightarrow |e^{2\pi i(x+iy)}| = \overbrace{|e^{2\pi i x}|}^{1} \cdot |e^{-2\pi y}| = 1$$

Si $y \neq 0$, no se cumple la igualdad, por lo que necesariamente si $\text{Im}(z) \neq 0$, z no es raíz.
Será raíz sólo si $x \in \mathbb{Z}$, por lo que

$f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

Luego, los polos son los enteros, todos de orden 1, excepto $z=0$, que posee multiplicidad 3.

ii) calcule los residuos de los polos de f.

Como son funciones (no polinomios), vemos el límite de $(z-p_0)^{\alpha}\cdot f(z)$, donde p_0 es un polo de multiplicidad α.

Luego,

- $$\lim_{z\to 0} \frac{\pi\cos\pi z}{z^2 \sin\pi z}(z-0)^3 = \lim_{z\to 0} \pi z\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}$$

pero $\lim_{z\to 0}\cos\pi z = 0$

y $$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi z - \operatorname{sen} 0}{z-0} = \frac{d}{dz}\sin(\pi z)\Big|_{z=0}$$

$$= \pi\cos\pi z\Big|_{z=0} = \pi$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0}\pi z\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z} = 1 = g(0) = z^3 f(z)\Big|_{z=0}$$

- Para $p_0 = n\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{z\to n} f(\pi z)(z-n) = \lim \frac{\pi\cos\pi z}{z^2\operatorname{sen}\pi z}(z-n)$$

Como ambos límites existen, $\lim_{x\to\beta} a(x)b(x) = \lim_{x\to\beta} a(x)\lim_{x\to\beta} b(x) \neq \pm\infty$

$$= \lim_{z\to n}\frac{\cos\pi z}{z^2}\lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

pero $\operatorname{sen}(\pi(z-n)) = \operatorname{sen}\pi z\cdot\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n} - \cos\pi z\cdot\underbrace{\operatorname{sen}\pi n}_{0}$

$$= \left[\frac{\cos\pi n}{n^2}\right]\cdot\left[\lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)\cdot(-1)^n}{\operatorname{sen}(\pi(z-n))}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n\left[\lim_{z\to n}\underbrace{\frac{\pi(z-n)}{\operatorname{sen}(\pi(z-n))}}_{\to 1}\right] = \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Para ver los residuos, recordamos que

$$\text{res}(f,p) = \frac{d^{m-1}[(z-p)^m f(z)]}{(m-1)!}$$ o en su defecto, usando límites.

Luego

- $\text{Res}(f,n) = \frac{1}{n^2} \quad (m=1)$

- $\underset{m=3}{\text{Res}(F,0)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(f(z)\cdot z^3) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\pi \frac{\cot g(\pi z)}{z^2} z^3\right)$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\cot g(\pi z) - \text{cosec}^2(\pi z)\cdot\pi\cdot z\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0}\left[-2\,\text{cosec}^2(\pi z)\cdot\pi + 2\,\text{cosec}^2(\pi z)\cot g(\pi z)\pi^2 z\right]$$

$$= \pi^2\lim_{z\to 0}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)\cdot z}{\text{sen}^3(\pi z)} - \frac{1}{\text{sen}^2(\pi z)}\right]$$

$$= \pi^2\lim_{z\to 0}\left[\frac{\pi z\cos\pi z - \text{sen}(\pi z)}{\text{sen}^3(\pi z)}\right]$$

l'hôpital

$$= \pi^2\lim_{z\to 0}\left[\frac{-\pi^2 z\,\text{sen}\,\pi z + \pi\cos\pi z - \pi\cos\pi z}{3\,\text{sen}^2(\pi z)\cos(\pi z)\cdot\pi}\right]$$

$$= \frac{-\pi^2}{3}\lim_{z\to 0}\left[\underbrace{\frac{\pi z}{\text{sen}(\pi z)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(\pi z)}}_{\to 1}\right] = \frac{-\pi^2}{3}$$

iii) "Calcule $\oint_{\partial C_N} F(z)\,dz$ y concluye el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$"

Aplicando el Teo de los Residuos

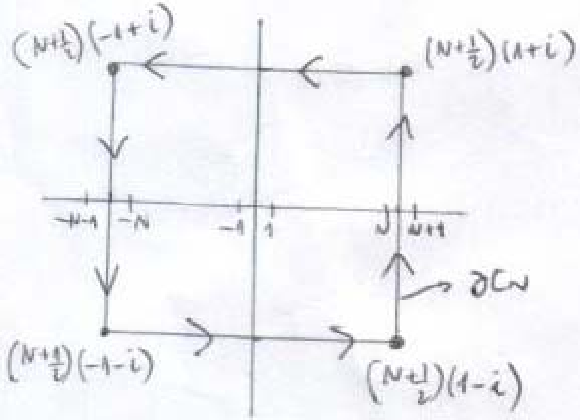
$$\oint_{\partial C_N} F(z)\,dz = 2\pi i\left[\frac{-\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{n=N}\frac{1}{n^2}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{-\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right]$$

Aplicando límite a ambos lados, analizemos el lado izquierdo

$$\left|\oint_{\partial C_N} f(z)\,dz\right| \le \oint_{\partial C_N}\left|\pi \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2}\right|dz = \pi \oint \frac{|\operatorname{cotg}(\pi z)|}{|z|^2}\,dz \quad (*)$$

pero $|\operatorname{cotg}(\pi z)| < M \quad \forall z \in \partial C_N,\ N \in \mathbb{N}$



$$(*) \le \pi M \oint_{\partial C_N} \frac{1}{|z|^2}\,dz$$

$$\le \frac{\pi M}{(N+\frac{1}{2})^2} \oint_{\partial C_N} |dz|$$

(pues $|z| \geq (N+\frac{1}{2})$)

y $\oint_{\partial C_N} |dz|$ es el largo de la curva igual a $8\,(N+\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \quad \left|\oint_{\partial C_N} f(z)\,dz\right| \le \frac{8\pi M}{(N+\frac{1}{2})} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Luego

$$2\pi i \left[-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

//

P4) Sea $S_n(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n$

$T_n(z) = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$

a) Mostrar que $S_n(z) = \dfrac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z}$

b) Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ y usando (a) calcular la suma de dicha serie.

Sol)

a) Veamos que

$$\begin{aligned}
(1-z)\cdot S_n(z) &= (1-z)(z + 2z^2 + \dots + nz^n) \\
&= (z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n) \\
&\quad - (z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + \dots + nz^{n+1}) \\
&= z + (2z^2 - z^2) + (3z^3 - 2z^3) + \dots + (nz^n - (n-1)z^n) - nz^{n+1} \\
&= z + z^2 + z^3 + \dots + z^n - nz^{n+1} \\
&= T_n(z) - nz^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z} \quad //$$

b) $\dfrac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, R radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$

$= \limsup_n \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

Aquí, $a_n = n$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \quad / \ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{R}\right) = \limsup_{n\to\infty} \ln n^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n$$

por l'hoppital

$$\ln\left(\frac{1}{R}\right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} n z^n < +\infty \text{ si } |z| < 1 \qquad //.$$

Calculemos $\sum n z^n$:

$$\sum_{n\geq 0} n z^n = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{con } S_n = \frac{T_n - n z^{n+1}}{1-z}$$

$$T_n = z + z^2 + \ldots + z^n = z(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})$$

$$= z \sum_{i=0}^{n-1} z^i = \frac{z(1-z^n)}{1-z} \xrightarrow[|z|<1]{n\to\infty} \frac{z}{1-z}$$

Por otra parte, si $|z|<1$

$$\lim_{n\to\infty} |n z^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} n |z|^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{|z|^{n+1}}}$$

$$\overset{\text{l'hopp.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-|z|^{n+2}}{n+1} = 0$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} \lim (T_n - n z^{n+1}) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

y por lo tanto

$$\sum_{n\geq 0} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \qquad //.$$

P5) Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-x^2}$

i) Det. la serie de potencias de f en torno al origen y su radio de convergencia

ii) Sea $b > 0$. Pruebe que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\,dx = e^{-b^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos(2by)\,dy = e^{-b^2} \int_{-b}^{b} e^{y^2}\,dy$$

(Calculo de Integrales Impropias, Ver Integral de Fresnel en el Apunte)

Hint: Dado $R > 0$, Integre $f(z)$ sobre la curva γ_R dada por la frontera del rectángulo de vértices $0, R, R+ib, ib$ recorrida en sentido antihorario

Sol)

i) $f(z) = e^{-z^2}$; $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} (-1)^n$

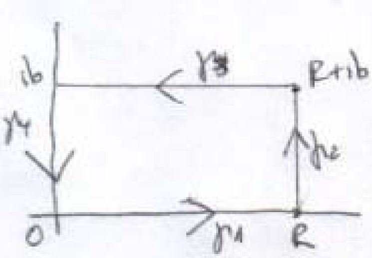
Converge si

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

$$= \frac{\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\frac{(-1)^n}{n!}} = \frac{-1}{(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 = \frac{1}{R}$$

$\Rightarrow R = +\infty$, la serie siempre converge.

ii)



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

$$f(z) \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

En:
$\gamma_1 : x \qquad x \in [0, R]$
$\gamma_2 : R + iy \qquad y \in [0, b]$
$\gamma_3 : x + ib \qquad x \in [R, 0]$
$\gamma_4 : iy \qquad y \in [b, 0]$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 0$$

por cambio de límites

$$\Rightarrow \int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^b e^{-(R+iy)^2} i\,dy - \int_0^R e^{-(x+ib)^2}dx - \int_0^b e^{-y^2} i\,dy = 0$$

$$= \int_0^R e^{-x^2}dx + i\int_0^b e^{-R^2}\cdot e^{-2iyR} e^{y^2}dy - \int_0^R e^{-x^2}e^{-2xib}\cdot e^{b^2}dx - i\int_0^b e^{-y^2}dy$$

$$= \Big[\underset{①}{\int_0^R e^{-x^2}dx} - \underset{②}{\int_0^R e^{-x^2} e^{-2xib}\cdot e^{b^2}dx}\Big] + i\Big[\underset{③}{\int_0^b e^{-R^2} e^{-2iyR} e^{y^2}dy} - \underset{④}{\int_0^b e^{-y^2}dy}\Big]$$

① $\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

② $\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}e^{-2xib}e^{b^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{b^2}\cdot e^{-x^2}(\cos(2xb) - i\,\mathrm{sen}(2bx))dx$

$= \int_0^\infty e^{b^2}e^{-x^2}(\cos 2xb - i\,\mathrm{sen}\,2bx)\,dx$

③ $\int_0^b e^{-R^2}e^{y^2}(\cos(2yR) - i\,\mathrm{sen}(2yR))dy$.

Para la parte real

$\left|\int_0^b e^{-R^2}e^{y^2}\cos(2yR)dy\right| \le \int_0^b |e^{-R^2}\cdot e^{y^2}\cos 2yR|\,dy$

$\le e^{-R^2}\int_0^b e^{y^2}dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

y para la parte imaginaria, lo mismo

$\left|\int_0^b e^{-R^2}e^{y^2}\mathrm{sen}(2yR)dy\right| \le e^{-R^2}\int_0^b e^{y^2}dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

④ $\lim_{R\to\infty}\int_0^b e^{-y^2}dy = \int_0^b e^{-y^2}dy$

Igualando entonces, tanto la parte real como la imaginaria a 0 ...

Real

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx - \int_0^{\infty} e^{b^2}e^{-x^2}\cos(2xb)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2xb)\,dx = e^{-b^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Imaginaria

$$\int_0^{\infty} e^{b^2}e^{-x^2}\operatorname{sen}(2bx)\,dx - \int_0^{b} e^{-y^2}dy = 0$$

C.V.: $x = y$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-y^2}\operatorname{sen}(2by)\,dy = e^{-b^2}\int_0^{b} e^{-y^2}dy$$

Suerte en el Control!