VARIABLE COMPLEJA

Resúmen

- Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = a + ib$

Prop:
1) $\overline{z} = a - ib$
2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
   $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3) $\overline{z} = z$ ssi $z \in \mathbb{R}$
4) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{(\overline{z})} = z$
5) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
6) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
7) $Im(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
8) $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Prop del módulo:
1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$, $|\overline{z}| = |z|$, $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$
2) $|z| = 0$ ssi $z = 0$ (ó $d(z_1, z_2) = 0$ ssi $z_1 = z_2$)
3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
4) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

- Representación polar

$z = x + iy = r\cos\theta + i \cdot r\,sen\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ y $\theta = \arg z$

θ medido en radianes, angulo entre el eje OX y que une el origen con un punto P. Como θ puede ser descrito por $\theta + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, se restringe θ a $]-\pi, \pi]$

$z = re^{i\theta}$, con $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,sen\theta \Rightarrow z = |z|e^{i\arg(z)}$

- Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$; $z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- Si $r_2 > 0$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$
- fórmula de Moivre $(\cos\theta + i\,sen\theta)^n = \cos n\theta + i\,sen\,n\theta$

- Continuidad

$F: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω abierto, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ es continua en z_0

$\Leftrightarrow \forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, con $z_n \to z_0$, se tiene $f(z_n) \to f(z_0)$

$\Leftrightarrow u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0)

Derivabilidad

$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω abierto, es derivable en z_0

$\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ existe

Si f es derivable en Ω se dice que f es holomorfa en Ω

Prop: f es derivable en $z_0 \Rightarrow f$ es continua en z_0

- Condición de Cauchy-Riemann

Sea $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, es derivable en z_0

ssi f es Frechet-Diferenciable en (x_0, y_0) como $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

donde $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

(Frechet Dif $\Rightarrow$ u y v con C^1 (derivadas parciales existen y son continuas))

- Series de Potencia

Sea la serie: $S_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $z \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $(c_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$

Radio de Convergencia: $R = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$

1) $S_n(z)$ converge si $|z - z_0| < R$

2) $S(z)$ es holomorfa en $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ con $S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}$

- Función Logaritmo

Para que se cumpla $\exp(\log(z)) = z$, buscamos $w = x + iy$ con $w = \log(z) \Rightarrow \exp(w) = e^x e^{iy} = r e^{i\theta}$, con $z \neq 0$

$\Rightarrow x = \ln r$ e $y = \theta \pmod{2\pi}$ $\Rightarrow$ Solución $\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ con $\arg z \in (-\pi, \pi]$

Luego, $\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$\log(z) = \ln|r| + i \arg z$

Prop:

- $\exp(\log(z)) = e^{\ln|z|} e^{i \arg z} = z$
- $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \pmod{2\pi i}$
- $\log(z)$ es discontinua en $\mathbb{R}^-$ (pasa de $-\pi$ a π el $\arg z$)
- $\log(z)$ es holomorfa $\mathbb{C} / \mathbb{R}^-$ y $\log'(z_0) = \frac{1}{z_0}$

Problemas

P1) Determinar aquellas funciones que son holomorfas en todo $\mathbb{C}$ y calcule su derivada ($z = x+iy$)

a) $f(z) = \bar{z} = x - iy$

Sol) Identificando $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ } son diferenciables con $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$ (existen y son continuas)

pero $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ $\Rightarrow$ f no es diferenciable, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

b) $f(z) = e^x(\cos y - i\,\text{sen}\,y) = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$

Sol) Aquí,

$u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = -e^x \,\text{sen}\, y$ } son diferenciables, con derivadas continuas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \;;\; \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \,\text{sen}\, y \;;\; \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \,\text{sen}\, y$$

$\Rightarrow$ No se cumple C-R $\Rightarrow$ f no es diferenciable $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

c) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i\,\text{sen}\,y) = e^{-x}e^{-iy} = e^{-z}$

Sol) $u(x,y) = e^{-x}\cos y$, $v(x,y) = -e^{-x}\,\text{sen}\,y$ } diferenciables, C^1

Veamos C-R

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}\,\text{sen}\,y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ f es diferenciable (y por lo tanto holomorfa) en $\mathbb{C}$

d) $f(z) = (z^3+1)e^{-y}(\cos x + i\,\text{sen}\,x) = (z^3+1)e^{-y}e^{ix}$

Sol) Con $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3y^2x + i(3x^2y - y^3)$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^{-y}\left[(x^3 - 3y^2x + 1)\cos x - (3x^2y - y^3)\,\text{sen}\,x\right]$$
$$v(x,y) = e^{-y}\left[(x^3 - 3y^2x + 1)\,\text{sen}\,x + (3x^2y - y^3)\cos x\right]$$

Multiplicación y suma de funciones C^1 $\Rightarrow$ u y v son C^1

Ahora, veamos C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}\left[(3x^2-3y^2)\cos x - (x^3-3y^2x+1)\operatorname{sen} x - 6xy\operatorname{sen} x - (3x^2y-y^3)\cos x\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}\left[(x^3-3y^2x+1)\operatorname{sen} x + (3x^2y-y^3)\cos x\right] + e^{-y}\left[-6yx\operatorname{sen} x + (3x^2-3y^2)\cos x\right]$$

reordenando, vemos que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}\left[(x^3-3y^2x+1)\cos x - (3x^2y-y^3)\operatorname{sen} x\right] + e^{-y}\left[-6yx\cos x - (3x^2-3y^2)\operatorname{sen} x\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\left[(3x^2-3y^2)\operatorname{sen} x + (x^3-3y^2x+1)\cos x + (6xy)\cos x - (3x^2y-y^3)\operatorname{sen} x\right]$$

notando que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\Rightarrow$ Se cumple C-R y por lo tanto, f es diferenciable en $\mathbb{C}$ (y holomorfa)

P2)

a) Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.

Sol: Como f es diferenciable

$\Rightarrow$ f es Frechet-dif ($\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existen y son continuas) y se cumplen las cond. de Cauchy-Riemann

Es decir, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Pero $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $v(x,y) = 0$ $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ y como $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial}{\partial}(x_0,y_0)$

$\Rightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow$ f es cte en Ω.

b) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos ($\exists$ una curva regular por trozos que une dos puntos cualquiera de Ω, y que está totalmente contenida en Ω) y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Probar que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Hint: Considere $|f|^2$

Sol)

Para un $z \in \mathbb{C}$ se tiene que si $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Luego, f holomorfa tal que $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

$\Leftrightarrow f = u + iv \Rightarrow |f| = \sqrt{u^2+v^2}$

o bien $|f|^2 = u^2 + v^2$

$|f| = cte \Rightarrow \frac{d(|f|^2)}{dx} = 0$ y $\frac{d(|f|^2)}{dy} = 0$

$\Rightarrow \frac{d(u^2+v^2)}{dx} = 2u\frac{du}{dx} + 2v\frac{dv}{dx} = 0$

$\Rightarrow (1)\ uu_x + vv_x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0$

y $\frac{d(u^2+v^2)}{dy} = 2u\frac{du}{dy} + 2v\frac{dv}{dy} = 0$

$\Rightarrow (2)\ uu_y + vv_y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = 0$

Notando que (2) se puede escribir, usando Cauchy-Riemann, de la forma: ($\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$)

$(3)\ -uv_x + vu_x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_x \\ u_x \end{pmatrix} = 0$

Luego, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es perpendicular a $\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$ y a $\begin{pmatrix} -v_x \\ u_x \end{pmatrix}$ que son li (si $\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \neq 0$)

Como estamos en $\mathbb{R}^2$, y $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ no puede ser $\perp$ a dos vectores li, entonces tenemos 2 casos:

- $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow f$ es constante
- $\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f$ es constante

Luego, f es constante en Ω.

P3) Sabiendo que la serie $S(z) = \sum C_k (z-z_0)^k$ tiene radio de convergencia $R_0 > 0$, determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias $\left(\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} |C_k|^{1/k} \right)$

a) $\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} (z-z_0)^k$

Sol)

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} |C_{2k}|^{1/k} = \left(\limsup_{k\to\infty} |C_{2k}|^{1/2k} \right)^2$$

$$\leq \left(\limsup_{N\to\infty} |C_N|^{1/N} \right)^2 = \left(\frac{1}{R_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow \rho \geq R_0^2 \leftarrow \text{radio de convergencia}$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} C_{nk} (z-z_0)^k$

Sol)

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} |C_{nk}|^{1/k} = \left(\limsup_{k\to\infty} |C_{nk}|^{\frac{1}{nk}} \right)^n$$

$$\leq \left(\limsup_{N\to\infty} |C_N|^{1/N} \right)^n = \left(\frac{1}{R_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow \rho \geq R_0^n \leftarrow \text{radio de convergencia}$$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^{2k}$

Sol)

Llamando $w = z^2 \Rightarrow$ la serie queda $\sum_{k=0}^{\infty} C_k w^k$ cuyo radio de convergencia es R_0

Por lo tanto, la serie converge si $|z|^2 < R_0 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{R_0}$ y diverge en caso contrario

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{R_0} \text{ radio de convergencia}$$

($\rho = R_0^{1/n}$ en el caso general, $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^{nk}$)

d) $\sum_{k=0}^{\infty} C_k^n (z-z_0)^k$

Sol)

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} |C_k^n|^{1/k} = \left(\limsup_{k\to\infty} |C_k|^{1/k} \right)^n$$

$$\leq \left(\limsup_{N\to\infty} |C_N|^{1/N} \right)^n = \left(\frac{1}{R_0}\right)^n \Rightarrow \rho \geq R_0^n \leftarrow \text{radio de convergencia}$$