MA26B Matemáticas Aplicadas
Profesor:Rafael Correa
Auxiliares: Omar Larré, Tomás Spencer, Leonardo Zepeda

Guía Variable Compleja

1. Obtenga expansiones en series de potencias alrededor de cero para las siguientes funciones:

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^3}$

   (c) $f(z) = \arctan(z)$

   (d) $f(z) = \log(1+z^2)$

   (e) $f(z) = \log(\dfrac{1+z}{1-z})$

   (f) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+z-2)^2}$

2. Suponga que f es analítica en el abierto $U \subset \mathbb{C}$. Definimos $U^* = \{\bar{z} \ / \ z \in U\}$ y $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$. Pruebe que g es analítica en U^* y que $g'(z) = \bar{f}'(\bar{z})$.

3. Calcule la integral :
$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{3z^n - 1} dz$$

4. Calcule:
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z(2z+1)^2} dz$$

5. Sea n un natural y $0 < \theta < \pi$ Pruebe que:
$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2} \frac{z^n}{1 - 2z\cos\theta + z^2} dz = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

Soluciones:

1. (a) Consideremos: $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$, entonces tenemos que $g'(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$, que es lo que deseamos encontrar, entonces expandimos en series de potencias $g(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} z^i$,esto por la serie geométrica, que converge para $|z| < 1$, entonces sabemos que es derivable dentro, y además es

derivable "término a término" dentro de su radio de convergencia, entonces $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = f(z)$

(b) Consideramos $h(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$, análogamente a la parte a)

$h'(z) = -4\dfrac{z}{(z^2+1)^3} = -4zf(z)$,

ahora reescribimos $h(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \dfrac{1}{(1-(-z^2))^2}$

luego por la parte anterior tenemos que:

$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n z^{2n}$, con lo cual

obtenemos que $h'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n(n+1)z^{2n-1}$, entonces

$$f(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n(n+1)z^{2n-1}}{-4z} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)z^{2n-2}$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1)z^{2n}$$

(c) En este caso derivaremos e integraremos para obtener una serie de pontencias, entonces tenemos que:

$h(z) = \arctan(z)$, entonces $h'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$,

ahora la reescribimos inteligentemente para obtener la geométrica

$h'(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{1-(-z^2)}$

lo cual implica $h'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, ahora integramos dentro de su radio de convergencia, por lo cual podemos pasar la integral hacia dentro entonces:

$$h(z) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2(n+1)}}{2(n+1)},$$

ahora fijamos un punto para asegurarnos que sean la misma función, ya que hemos estado trabajando con las derivadas. Pero como $\arctan(0) = 0$ entonces vemos que la serie de pontecias está bien.

(d) $h(z) = \log(1+z^2)$

$$\Rightarrow h'(z) = 2\frac{z}{z^2+1} = 2\frac{z}{1-(-z^2)} = 2z\sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}$$

integramos dentro de su radio de convergencia:

$$h(z) - c = \int 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n z^{2n+1}$$
$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2(n+1)}}{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2(n+1)}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{n}$$

luego calculamos la constante c que es la que sale al integrar, y es calro que es 0, luego

$$\log(1+z^2) \; = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{n}$$

(e) Análogo a los anteriores.

(f) Tenemos que $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+z-2)^2} = \dfrac{1}{z^2+z-2} . \dfrac{1}{z^2+z-2}$, entonces vamos a expandir en series la función

$$h(z) = \frac{1}{z^2+z-2} = \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z+2}\right] = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\right]$$
$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}\right] = -\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{2})^n\right]$$
$$= -\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+1} z^n\right] = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+1} + 1\right] z^n$$

Ahora que tenmos $h(z)$ expresado en series de potencias, si tomamos los valores en su radio de convergencia, converge absolutamente, luego las podemos multiplicar y usamos el coeficiente de Cauchy, para calcular los nuevos coeficientes.

Los coeficientes de Cauchy son de la siguiente manera:

si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes,

entonces $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ también converge y es tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right), \text{ con } \; c_{n=} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i$$

Luego calculemos $c_n = \sum_{i=0}^{n}\left((-1)^i(\frac{1}{2})^{i+1} + 1\right)\left((-1)^{n-i}(\frac{1}{2})^{n-i+1} + 1\right) =$

$$\sum_{i=0}^{n}\left((-1)^i(\frac{1}{2})^{i+1}(-1)^{n-i}(\frac{1}{2})^{n-i+1} + (-1)^{n-i}(\frac{1}{2})^{n-i+1} + (-1)^i(\frac{1}{2})^{i+1} + 1\right) =$$

$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\frac{1}{2})^{i+1}(-1)^{n-i}(\frac{1}{2})^{n-i+1}+\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(\frac{1}{2})^{n-i+1}+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\frac{1}{2})^{i+1}+$
$\sum_{i=0}^{n}1=$
$\sum_{i=0}^{n}(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+2}-\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i+1}(\frac{1}{2})^{n-i+1}-\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}(\frac{1}{2})^{i+1}+(n+1)$
$=(n+1)(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+2}-2\sum_{i=0}^{n}(-\frac{1}{2})^{i+1}+(n+1)=$
$=(n+1)(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+2}-2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+(n+1)$
$=(n+1)\left(1+(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+2}\right)-2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$
reduciendo al máximo
$=2\left(\frac{1}{2}\right)^n+(n+1)\left((-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+1\right)-4$
luego tenemos :
$f(z)=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{n}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n+(n+1)\left((-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+1\right)-4\right)z^n$
Que "debería" ser la expansión en series de potencias.